DS5 correction (version A)

Problème 1 (sujet maison)

Partie I : Etude d'une matrice A

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** On compile le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

Démonstration. D'après l'affichage **Python** : $\boxed{A^3 = A}$. □

b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

Démonstration. D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A. Or,

$$P(X) = X(X^2 - 1) = X(X-1)(X+1)$$

On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P(X)\} = \{-1, 0, 1\}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1,\ 0 \text{ et } 1}$. □

2. a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

•

$$\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) &\iff (A+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 2z &=& 0 \\ x + 2y + 2z &=& 0 \\ -2x - 2z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 3x - 2y + 2z &=& 0 & \\ x + 2y + 2z &=& 0 & \\ x + z &=& 0 & L_3 \longleftarrow -\frac{1}{2} L_3 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 3x - 2y + 2z &=& 0 & \\ 8y + 4z &=& 0 & L_3 \longleftarrow 3L_2 - L_1 \\ 2y + z &=& 0 & L_3 \longleftarrow 3L_3 - L_1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 2z &=& 0 \\ 2y + z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y &=& -2z \\ 2y &=& -z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 3x &=& -3z & L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ 2y &=& -z & \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -\frac{1}{2} z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2} z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{1}{2} z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc -1 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_{-1}(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul donc $\boxed{\mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(A)}$.

•

$$\begin{aligned}
U \in E_0(A) &\iff AU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ -2y - z = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y = -z \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -3z & L_1 \longleftarrow 2L_1 + L_2 \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_0(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{3}{2}z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2}z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_0(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 0 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_0(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_0 \text{ est une base de } E_0(A)}$.

•

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A - I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & + 2z & = 0 \\ x & & & + 2z & = 0 \\ -2x & & & - 4z & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lcrcl} x & - & 2y & + 2z & = 0 \\ x & & & + 2z & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lcrcl} x & - & 2y & + 2z & = 0 \\ & & 2y & & = 0 \end{array} \right. \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2z \\ & y = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 1 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_1(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(A)}$.

Les valeurs propres possibles de A sont $-1, 0, 1$ et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de A. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}}$$

□

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

Démonstration. La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe

- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de A

- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A

telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, on a bien $A = PDP^{-1}$. □

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on le note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

3. Deux résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

Démonstration. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \alpha_n M &= \alpha_n \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_n a & \alpha_n b & \alpha_n c \\ \alpha_n d & \alpha_n e & \alpha_n f \\ \alpha_n g & \alpha_n h & \alpha_n i \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \ell a & \ell b & \ell c \\ \ell d & \ell e & \ell f \\ \ell g & \ell h & \ell i \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \ell M \end{aligned}$$

□

b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim_{n\to+\infty} M_n = M$ et $\lim_{n\to+\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n + M'_n = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} M_n M'_n = MM'$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

-
$$\begin{aligned} M_n + M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n + a'_n & b_n + b'_n & c_n + c'_n \\ d_n + d'_n & e_n + e'_n & f_n + f'_n \\ g_n + g'_n & h_n + h'_n & i_n + i'_n \end{pmatrix} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ d + d' & e + e' & f + f' \\ g + g' & h + h' & i + i' \end{pmatrix} = M + M' \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} M_n M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n a'_n + b_n d'_n + c_n g'_n & a_n b'_n + b_n e'_n + c_n h'_n & a_n c'_n + b_n f'_n + c_n i'_n \\ d_n a'_n + e_n d'_n + f_n g'_n & d_n b'_n + e_n e'_n + f_n h'_n & d_n c'_n + e_n f'_n + f_n i'_n \\ g_n a'_n + h_n d'_n + i_n g'_n & g_n b'_n + h_n e'_n + i_n h'_n & g_n c'_n + h_n f'_n + i_n i'_n \end{pmatrix} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} aa' + bd' + cg' & ab' + be' + ch' & ac' + bf' + ci' \\ da' + ed' + fg' & db' + ee' + fh' & dc' + ef' + fi' \\ ga' + hd' + ig' & gb' + he' + ih' & gc' + hf' + ii' \end{pmatrix} = MM' \end{aligned}$$

□

Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

4. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors e^D existe et vaut $\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. La matrice D étant diagonale, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_n(D) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix} \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en reconnaissant des sommes partielles de séries exponentielles. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{e}^D \text{ existe et } \mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}}$$

□

5. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire la matrice M^k pour tout entier naturel k.

Démonstration. On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $k \geqslant 3$, $M^k = M^3 M^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} M^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Finalement,

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ M^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } k = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 2 \\ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \text{si } k \geqslant 3 \end{cases}}$$

☐

b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} M^k + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!} M^k && \text{par Chasles, car } n \geqslant 2 \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} M^k && \text{car } M^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \text{ si } k \geqslant 3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(S_n(M))$ est constante à partir du rang 2. On en déduit que

$$S_n(M) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{e^M \text{ existe et } e^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

☐

6. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 en fonction de M.

Démonstration. On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M$$

et

$$M^3 = M^2 M = (3M)M = 3M^2 = 3(3M) = 3^2 M$$

□

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de M^k puis la démontrer par récurrence.

Démonstration. D'après la question précédente, on conjecture que $M^k = 3^{k-1}M$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $M^k = 3^{k-1}M$ ».
<u>Initialisation</u> :
D'une part, $M^1 = M$. D'autre part, $3^{1-1}M = 3^0 M = M$. D'où $\mathcal{P}(1)$.
<u>Hérédité</u> :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= MM^k \\ &= M(3^{k-1}M) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^{k-1}M^2 \\ &= 3^{k-1}(3M) && \text{cf la question } \textbf{\textit{6.a)}} \\ &= 3^k M \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.
Par principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = 3^{k-1}M}$. □

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \\ &= M^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} M^k && \text{par Chasles, car } n \geqslant 1 \\ &= I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 3^{k-1} M \\ &= I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 3^k M \\ &= I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!}\right) M \\ &= \boxed{I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M} \end{aligned}$$

Vérifions que cette égalité est valable pour $n = 0$.

- D'une part, $S_0(M) = \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} M^k = \frac{1}{0!} M^0 = I$
- D'autre part, $I + \frac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=0}^{0} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M = I + \frac{1}{3}(1-1) M = I$

D'où l'égalité pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. □

d) En déduire que e^M existe et que

$$\mathrm{e}^M = I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

Démonstration. On reconnaît une somme partielle de série exponentielle, d'où

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3 - 1\right)$$

D'après la question ***3.a)***,

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

puis, d'après la question ***3.b)***,

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{e}^M \text{ existe et } \mathrm{e}^M = I + \tfrac{\mathrm{e}^3-1}{3} M.}$$

□

7. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie I et on fixe un réel t.

a) Déduire de la question ***2.b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(tA) = P S_n(tD) P^{-1}$$

Démonstration. D'après la question ***2.b)***, $A = PDP^{-1}$. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n(tA) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(tA)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} PD^kP^{-1} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} D^k\right) P^{-1} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (tD)^k\right) P^{-1} \\
&= P S_n(tD) P^{-1}
\end{aligned}$$

□

b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t.

Démonstration. On remarque que la matrice tD est diagonale et, plus précisément,

$$tD = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

D'après la question ***4***, la matrice e^{tD} existe et vaut

$$\mathrm{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

Ceci veut exactement dire que

$$S_n(tD) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \tag{1}$$

D'après la question ***3.b)*** et la question précédente, on a alors

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}$$

On en déduit que e^{tA} existe et $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ avec

$$\Delta(t) = \mathrm{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

□

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

8. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$, où A est la matrice étudiée dans la partie I.

Démonstration. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right. \\ &\iff X \text{ est solution de } (S) \end{aligned}$$

□

9. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

Démonstration. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(u,v,w) \text{ est un état d'équilibre de } (S) &\iff A\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A) \\
&\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{cf question } \textbf{\textit{2.a)}}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des états d'équilibre de (S) est

$$\mathrm{Vect}\,((3,1,-2)) = \{\lambda(3,1,-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

10. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S). On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

Démonstration. Notons $W = X(t_0) = Y(t_0)$. Sous ces hypothèses, X et Y sont deux solutions du même problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} Z'(t) = AZ(t) \\ Z(t_0) = W \end{cases} \qquad , \qquad \text{d'inconnue } Z$$

Or, tout problème de Cauchy admet une unique solution. On en déduit que $X = Y$, *i.e.* pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = Y(t)$. □

11. Montrer que les solutions de (S) sont de la forme

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. La matrice A est diagonalisable (cf question ***2.b)***) et on a montré à la question ***2.a)*** que (U_{-1}, U_0, U_1) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. D'après le cours, les solutions de (S) sont toutes de la forme

$$\begin{aligned}
X(t) &= \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta \mathrm{e}^{0t} U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1 \\
&= \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1
\end{aligned}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. □

12. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera X_1.

Démonstration. On considère une solution X quelconque de (S) :

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^{t} U_1$$

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_1) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 9 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 4 \\ -2\alpha & - & 2\beta & + & \gamma & = & -8 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 9 \\ & - & \beta & + & 2\gamma & = & -1 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 9 \\ & - & \beta & + & 2\gamma & = & -1 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & 3\beta & & & = & 9 \\ & - & \beta & & & = & -1 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & & & & & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{par remontées successives}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$ est

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X_1(t) = 3e^{-t} U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}}$$

☐

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

Démonstration. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

donc $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $z_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -2$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$. D'après la question ***9***, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel (S). ☐

b) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera X_2.

Démonstration. On considère une solution X quelconque de (S) :

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1$$

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_2) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 3 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\ -2\alpha & - & 2\beta & + & \gamma & = & -3 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 3 & \\ & - & \beta & + & 2\gamma & = & 1 & \quad L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 0 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 3 & \\ & - & \beta & + & 2\gamma & = & 1 & \\ & & & & \gamma & = & 1 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{par remontées successives}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$ est

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X_2(t) = \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + U_0 + \mathrm{e}^{t} U_1 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} + 3 - 2\mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-t} + 1 \\ -2\mathrm{e}^{-t} - 2 + \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}}$$

□

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

Démonstration. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} + 3 - 2\mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-t} + 1 \\ -2\mathrm{e}^{-t} - 2 + \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $z_2(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente. □

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

Démonstration. • La figure 4 est la seule où l'on a $z(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution X_2.

- Dans la figure 3, on a $z(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution X_1.
- Dans la figure 1, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution X_1 donc cette figure ne correspond pas à X_1.
- Par élimination, la figure 2 correspond à la solution X_1. De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que $x_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $z_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -2$.

$\square$

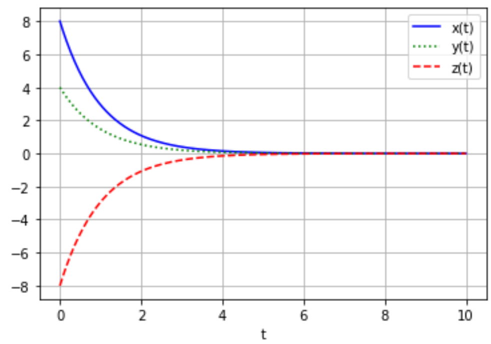


Fig. 1 Tracé 1

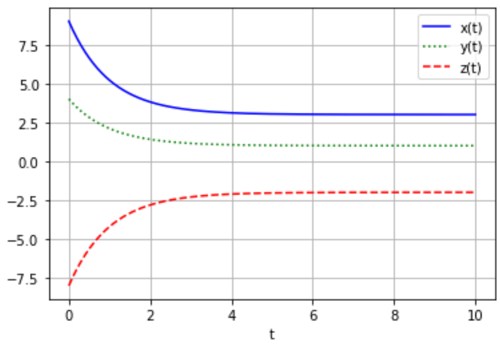


Fig. 2 Tracé 2

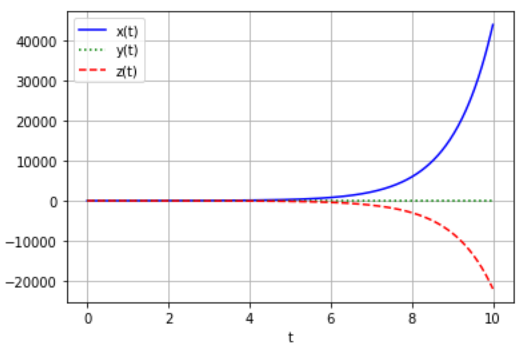


Fig. 3 Tracé 3

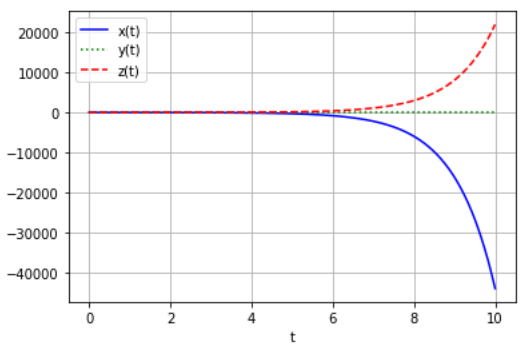


Fig. 4 Tracé 4

13. Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

a) On fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et on considère la solution de (S) :

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^{t} U_1$$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tA} C$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA}C &= P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}P\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} && \text{cf question } \textbf{\textit{7.b)}}\\
&= P\mathrm{e}^{tD}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}\alpha\mathrm{e}^{-t}\\\beta\\\gamma\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}\\
&= P\left(\alpha\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \alpha\mathrm{e}^{-t}P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\mathrm{e}^{t}P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \alpha\mathrm{e}^{-t}U_{-1}+\beta U_0+\gamma\mathrm{e}^{t}U_1\\
&= X(t)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que P est précisément la matrice obtenue en concaténant les vecteurs colonnes U_{-1}, U_0 et U_1. □

b) Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

Démonstration. Considérons une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 :

$$y' = ay$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre.
D'après le cours, les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y(t) = c\mathrm{e}^{at}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on a montré à la question précédente que les solutions de $X' = AX$ admettaient une « formule exponentielle » analogue : $c \in \mathbb{R}$ est analogue à $C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (paramètre(s) à choisir) et e^{at} est analogue à e^{tA}. □

Exercice 2 (provenance inconnue + sujet maison)

1. On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - $\times$ sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - $\times$ sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - $\times$ si $x \in]-\infty, 0[$, alors : $f(x) = 0$. Ainsi : $f(x) \geqslant 0$.
  - $\times$ si $x \in [0, +\infty[$, alors, comme $x \geqslant 0$: $f(x) = x \exp\left(-\dfrac{-x^2}{2}\right) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  - $\times$ Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$$

  - $\times$ Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\ dt &= \int_0^A t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt \\ &= \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]_0^A \\ &= -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + 1 \end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

Dans la suite de cette question, on note X une variable aléatoire admettant f pour densité.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
× si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors, comme f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$F_X(x) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ 0$$

× si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{0}^{x} f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \int_{0}^{t} t\, \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt \\ &= \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]_0^x \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}}$$

□

c) On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y. Reconnaître la loi de Y.

Démonstration.
- Tout d'abord, par définition : $Y = X^2$. Donc : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\left[X^2 \leqslant x\right]) \\ &= \mathbb{P}([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]) \\ &= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) && \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}\right) - 0 && \textit{(d'après la question précédente, car } -\sqrt{x} \in \,]-\infty, 0]\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

  Finalement : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.

- On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

□

2. On pose g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \alpha x^{-4} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

a) Pour quelle valeur de α la fonction g est une densité de probabilité ?

Démonstration. • La fonction $x \mapsto x^{-4}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-4}\ dx$ est impropre en $+\infty$. Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^B x^{-4}\ dx &= \left[\ \frac{x^{-3}}{-3}\ \right]_1^B \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{B^3} - 1\right) \\ &\underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-4}\ dx$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-4}\ dx = \frac{1}{3}$.

• Si g est une densité de probabilité, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx = 1$. Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx &= \int_1^{+\infty} g(x)\ dx && \text{car } g \text{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\\ &= \int_1^{+\infty} \alpha x^{-4}\ dx \\ &= \frac{\alpha}{3} && \text{d'après le point précédent} \end{aligned}$$

d'où $\alpha = 3$.

• Réciproquement, supposons que $\alpha = 3$. Alors,

× g est continue sur $]-\infty, 1[$ en tant que fonction constante sur cet intervalle et est continue sur $]1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

× pour tout $x < 1$, $g(x) = 0 \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 1$, $g(x) = 3x^{-4} \geqslant 0$.

× $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx = 1$ d'après ce qui précède.

donc g est une densité de probabilité.

□

Dans la suite de cette question, on suppose que α prend cette valeur et on note Z une variable aléatoire admettant g pour densité.

b) Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.

Démonstration. La densité g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$, donc on peut considérer que $Z(\Omega) = [1, +\infty[$.
Soit $z \in \mathbb{R}$.
<u>Si $z < 1$</u> :

Alors $[Z \leqslant z] = \varnothing$ donc $F_Z(z) = 0$.
Si $z \geqslant 1$:
Alors

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}([Z \leqslant z]) \\
&= \int_{-\infty}^{z} g(t)\ dx \\
&= \int_{1}^{z} 3t^{-4}\ dx \\
&= 1 - \frac{1}{z^3} && \text{cf question } \textbf{\textit{2.a)}}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{F_Z : z \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{z^3} & \text{si } z \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } z < 1 \end{cases}}$$

□

c) On pose $W = -2Z + 1$. Déterminer la fonction de répartition de W puis montrer que W est une variable aléatoire à densité et expliciter une densité de W.

Démonstration. Notons $h : x \mapsto -2x + 1$. On a

$$\begin{aligned}
W(\Omega) &= (h(Z))(\Omega) \\
&= h(Z(\Omega)) \\
&= h([1, +\infty[) \\
&=]-\infty, -1]
\end{aligned}$$

Soit $w \in \mathbb{R}$.
Si $w > -1$:
Alors $[W \leqslant w] = \Omega$ donc $F_W(w) = 1$.
Si $w \leqslant -1$: Alors,

$$\begin{aligned}
F_W(w) &= \mathbb{P}([W \leqslant w]) \\
&= \mathbb{P}([-2Z + 1 \leqslant w]) \\
&= \mathbb{P}([-2Z \leqslant w - 1]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[Z \geqslant \frac{1-w}{2}\right]\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[Z < \frac{1-w}{2}\right]\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \frac{1-w}{2}\right]\right) && \text{car } Z \text{ est à densité} \\
&= 1 - F_Z\left(\frac{1-w}{2}\right) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{1-w}{2}\right)^3}\right) && \text{car } \frac{1-w}{2} \geqslant 1 \\
&= \frac{2^3}{(1-w)^3}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{F_W : w \mapsto \begin{cases} \frac{2^3}{(1-w)^3} & \text{si } w \leqslant -1 \\ 1 & \text{si } w > -1 \end{cases}}$$

La fonction F_W est :

- continue sur $\mathbb{R}$. En effet,
  - $\times$ F_W est continue sur $]-\infty, -1[$ car inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur cet intervalle
  - $\times$ F_W est continue sur $]-1, +\infty[$ car constante sur cet intervalle
  - $\times$ $\lim\limits_{\substack{w \to -1 \\ w > -1}} F_W(w) = \lim\limits_{\substack{w \to -1 \\ w > -1}} 1 = 1 = F_W(-1)$

    et $\lim\limits_{\substack{w \to -1 \\ w < -1}} F_W(w) = \lim\limits_{\substack{w \to -1 \\ w < -1}} \frac{2^3}{(1-w)^3} = \frac{2^3}{2^3} = 1 = F_W(-1)$

    donc F_W est continue en -1
- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$ pour les raisons évoquées ci-dessus.

donc W est une variable aléatoire à densité.
Pour trouver une densité de W, on dérive F_W sur les intervalles ouverts où elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
On pose

$$f : w \mapsto \begin{cases} 3 \times 2^3 (1-w)^{-4} & \text{si } w < -1 \\ 0 & \text{si } w > -1 \end{cases}$$

puis on pose $f(-1) = 0$. La fonction f ainsi définie est une densité de W. □

Exercice 3 (EML 2018)

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

$$f'(x) \; = \; 1 - \frac{1}{x} \; = \; \frac{x-1}{x}$$

Alors, comme $x > 0$, la quantité $f'(x)$ **est** du signe de $x-1$. Ainsi :

$$f'(x) > 0 \; \Leftrightarrow \; x - 1 > 0 \; \Leftrightarrow \; x > 1$$

On obtient le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|c|ccccc|}
\hline
x & 0 & & & 1 & & +\infty \\
\hline
\text{Signe de } f'(x) & \| & & - & 0 & + & \\
\hline
 & \| & +\infty & & & & +\infty \\
\text{Variations de } f & \| & & \searrow & & \nearrow & \\
 & \| & & & 1 & & \\
\hline
\end{array}$$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in \,]0,+\infty[$:

$$f(x) \; = \; x - \ln(x) \; = \; x\Big(1 - \frac{\ln(x)}{x}\Big)$$

De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  × strictement décroissante sur $]0,1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$. Or :

$$f(]0,1[) \; = \; \Big] \lim_{x \to 1^-} f(x), \; \lim_{x \to 0} f(x) \Big[\; = \;]1,+\infty[$$

Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.

- La fonction f est :
  $\times$ continue sur $]1, +\infty[$ (car dérivable sur $]1, +\infty[$),
  $\times$ strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
  Ainsi f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $f(]1, +\infty[)$. Or :
$$f(]1,+\infty[) \ = \left] \lim_{x\to 1^-} f(x), \ \lim_{x\to +\infty} f(x) \right[=]1, +\infty[$$
  Or $2 \in \,]1, +\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée b.
- Enfin, $f(1) = 1$ et donc 1 n'est pas solution de $f(x) = 2$.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0, +\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Démonstration.
Remarquons :
$\times$ $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$.
$\times$ $f(b) = 2$.
$\times$ $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et $2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6$.
D'où : $f(4) \geqslant 2$.
Ainsi :
$$\begin{array}{ccccc} f(2) & \leqslant & 2 & \leqslant & f(4) \\ & & \shortparallel & & \\ & & f(b) & & \end{array}$$
Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f^{-1} :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$ est strictement croissante (*(de même monotonie que* f). En appliquant f^{-1} de part et d'autre, on obtient :
$$f^{-1}\big(f(2)\big) \ \leqslant \ f^{-1}\big(f(b)\big) \ \leqslant \ f^{-1}\big(f(4)\big)$$

On en déduit : $2 \leqslant b \leqslant 4$.

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir si $0,7$ est une sur ou sous-approximation de $\ln(2)$. Il n'est d'ailleurs pas indiqué l'erreur de précision commise par une telle approximation. Il s'agit d'une valeur approchée à 10^{-1} près et on a l'encadrement : $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$. Cette information serait certainement préférable pour résoudre plus rigoureusement cette question.

□

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

4. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \; \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

Démonstration.

- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle (en effet, d'après le tableau de variations de f en question ***1.*** : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $f(x) \geqslant 1$).

$$\boxed{\text{La fonction } \frac{1}{f} \text{ admet donc une primitive } G \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

- On obtient alors :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \; \Phi(x) = G(2x) - G(x)$$

  Or la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $G \circ h$ où :

  × $h : x \mapsto 2x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
    - telle que $h(]0, +\infty[) \subset \,]0, +\infty[$.

  × G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ (donc dérivable sur }]0, +\infty[) \\ \text{en tant que différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.\end{array}}$$

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= 2\,G'(2x) - G'(x) \;=\; 2\,\frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \;=\; \frac{2(\cancel{x} - \ln(x)) - (\cancel{2x} - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \;=\; \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]0, +\infty[, \; \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}$$

□

5. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.

- Soit $x \in \,]0,+\infty[$. D'après la question précédente, on a :

$$\Phi'(x) \;=\; \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))} \;=\; \frac{\ln(2)-\ln(x)}{f(x)\,f(2x)}$$

  Or, d'après la question ***1.*** : $f(x) > 0$ et $f(2x) > 0$.
  La quantité $\Phi'(x)$ est donc du signe de $\ln(2)-\ln(x)$. Or :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2)-\ln(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(2) > \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \quad 2 > x \end{aligned}$$

(car la fonction $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$*)*

  On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de Φ		$\nearrow$	$\Phi(2)$	$\searrow$	

□

6. Montrer : $\forall x \in \,]0,+\infty[, \; 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

- D'après la question ***1.***, pour tout $t \in \,]0,x]$: $f(t) \geqslant 1$.
  On en déduit, par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$:

$$\forall t \in \,]0,x], \; 0 \;\leqslant\; \frac{1}{f(t)} \;\leqslant\; 1$$

- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} 1 \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & \Phi(x) & & (2x-x)\times 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in \,]0,+\infty[, \; 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$
- La difficulté de la question vient du fait que l'on compare une quantité $\Phi(x)$ qui s'écrit comme une intégrale à la quantité x qui n'est pas naturellement donnée sous la forme d'une intégrale. Dès qu'il s'agit de démontrer une inégalité dans laquelle l'un des membres est une intégrale, il y a fort à parier qu'on puisse écrire l'autre membre sous forme intégrale (avec les mêmes bornes). On peut alors utiliser l'idée exposée dans le point précédent.
- L'idée à retenir est que pour comparer deux intégrales, on commence systématiquement par comparer les deux intégrandes.

□

7. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
Or :

× $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.
× $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \Phi \text{ est prolongeable par continuité et que ce prolongement, toujours noté } \Phi,\text{ vérifie } \Phi(0)=0.}$$

□

b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

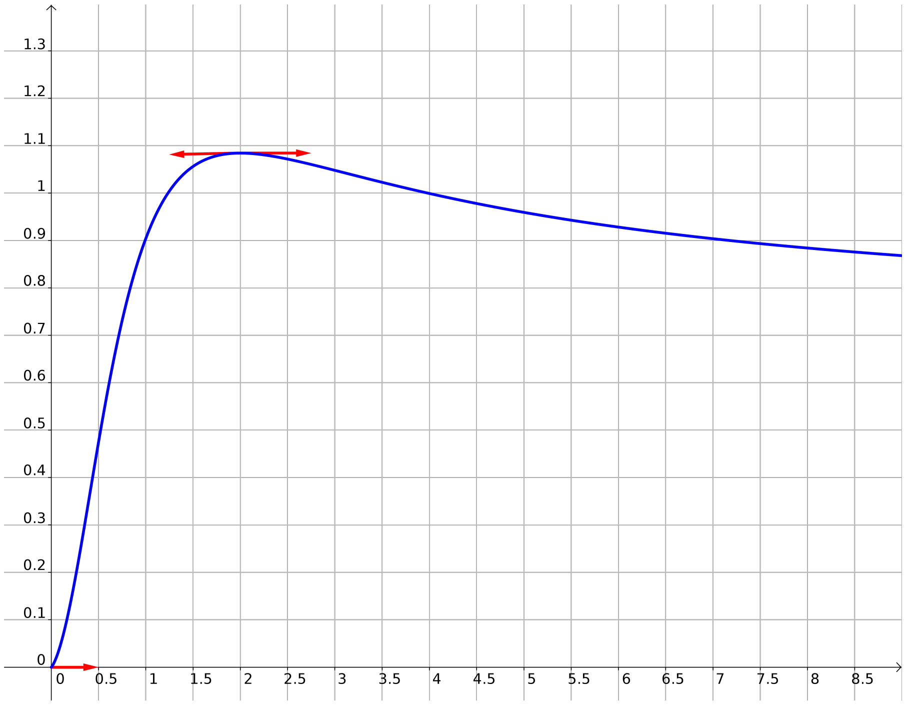
Démonstration.
D'après la question ***4.*** :
$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \Phi'(x) = \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}$$
Or, d'après la question ***1.*** : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, par composition, on a aussi : $\lim\limits_{x\to 0} f(2x) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0.}$$

□

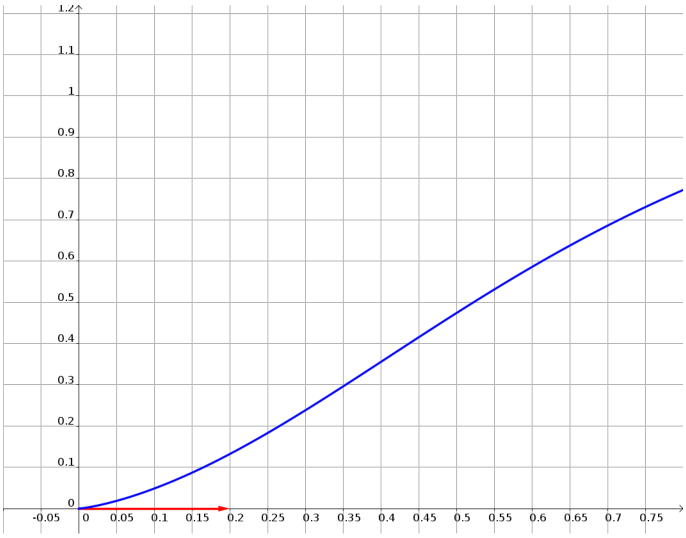
8. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Démonstration.



Commentaire

Sur le graphe précédent, la tangente à l'origine ne semble pas être correcte.
En effet, comme son étymologie (le verbe latin « tangere ») l'indique, une tangente doit **toucher** la courbe, ce qui ne paraît pas être le cas ici. Cela est simplement dû à l'échelle de la figure : si on zoome sur l'origine du repère, on obtient le graphe suivant :



Sur une copie, il faut bien évidemment accentuer les tangentes à la courbe. □