DS5 barème (version A)

Problème 1 (sujet maison)

Partie I : Etude d'une matrice A

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) On compile le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

- **1 pt :** $A^3 = A$

b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

- **1 pt :** $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ **est un polynôme annulateur de** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{$**racines de** $P(X)\}$
- **1 pt : les valeurs propres possibles de** A **sont** -1, 0 **et** 1

2. a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

- **2 pts :** $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ **donc** -1 **est valeur propre de** A
- **1 pt :** $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ **est une base de** $E_{-1}(A)$
- **1 pt :** $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

- **1 pt : La matrice** A **est carrée d'ordre** 3 **et admet trois valeurs propres distinctes donc** A **est diagonalisable**

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : Par la formule de changement de base, on a bien** $A = PDP^{-1}$
  ou P **est obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres**

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on le note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

3. Deux résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

- **2 pts : calcul correct**

b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim_{n\to+\infty} M_n = M$ et $\lim_{n\to+\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} M_n + M'_n = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} M_n M'_n = MM'$$

- **1 pt : calcul correct pour la somme**
- **2 pts : calcul correct pour le produit**

Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

4. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors e^D existe et vaut $\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

- **1 pt :** $D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $S_n(D) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}c^k \end{pmatrix}$
- **1 pt : reconnaissance des sommes partielles de séries exponentielles**

5. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire la matrice M^k pour tout entier naturel k.

- **1 pt :** $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt : synthèse**

b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

- **2 pts :** $S_n(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : e^M existe et e^M** $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 en fonction de M.

- **1 pt :** $M^2 = 3M$
- **1 pt :** $M^3 = 3^2 M$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de M^k puis la démontrer par récurrence.

- **1 pt : conjecture, pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$**,** $M^k = 3^{k-1}M$
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

- **2 pts : calcul**

d) En déduire que e^M existe et que

$$\mathrm{e}^M = I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

- **1 pt :** $\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(\mathbf{e}^3 - 1\right)$
- **1 pt : d'après la question *3.a)*,** $\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathbf{e}^3-1}{3} M$
- **1 pt : d'après la question *3.b)*,** $S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I + \frac{\mathbf{e}^3-1}{3} M$

7. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie I et on fixe un réel t.

a) Déduire de la question ***2.b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

- **1 pt :** $A = PDP^{-1}$**. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**,** $A^k = PD^kP^{-1}$
- **1 pt :** $S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$

b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t.

- **1 pt : D'après la question *4*, la matrice** $\mathbf{e}^{tD}$ **existe et vaut**

$$\mathbf{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^t \end{pmatrix}$$

- **1 pt : D'après la question *3.b)* et la question précédente, on a alors**

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\mathbf{e}^{tD}P^{-1}$$

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{tA}$ **existe et** $\mathbf{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ **avec**

$$\Delta(t) = \mathbf{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^t \end{pmatrix}$$

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

8. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$, où A est la matrice étudiée dans la partie I.

- **1 pt : équivalence bien écrite**

9. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

- **1 pt : (u,v,w) est un état d'équilibre de (S)** $\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A)$
- **1 pt : l'ensemble des états d'équilibre de (S) est**

$$\mathrm{Vect}\left((3,1,-2)\right) = \{\lambda(3,1,-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

10. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S). On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

- **1 pt : X et Y sont solutions du même problème de Cauchy**
- **1 pt : tout problème de Cauchy admet une unique solution**

11. Montrer que les solutions de (S) sont de la forme

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : La matrice A est diagonalisable (cf question *2.b)*)**
- **1 pt : on a montré à la question *2.a)* que (U_{-1}, U_0, U_1) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.**

12. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera X_1.

- **1 pt : écriture correcte du système** $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ \alpha + \beta = 4 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = -8 \end{cases}$
- **1 pt :** $\alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$
- **1 pt :** $X_1(t) = 3\mathbf{e}^{-t} U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6\mathbf{e}^{-t} + 3 \\ 3\mathbf{e}^{-t} + 1 \\ -6\mathbf{e}^{-t} - 2 \end{pmatrix}$

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

- **1 pt :** $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ **et** $z_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -2$. **Ainsi la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$**
- **1 pt : d'après la question *9*, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel (S)**

b) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera X_2.

- **1 pt : écriture correcte du système** $\begin{cases} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma = 3 \\ \alpha & + \ \beta & = 2 \\ -2\alpha & -2\beta & + \ \gamma = -3 \end{cases}$

- **1 pt :** $\alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha & & = 1 \\ & \beta & = 1 \\ & & \gamma = 1 \end{cases}$

- **1 pt :** $X_2(t) = \mathbf{e}^{-t} U_{-1} + U_0 + \mathbf{e}^{t} U_1 = \begin{pmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} + 3 - 2\mathbf{e}^{t} \\ \mathbf{e}^{-t} + 1 \\ -2\mathbf{e}^{-t} - 2 + \mathbf{e}^{t} \end{pmatrix}$

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

- **1 pt :** $z_2(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$**. La trajectoire associée à la solution** X_2 **est divergente.**

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

- **1 pt : La figure** 4 **est la seule où l'on a** $z(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$**. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution** X_2**.**
- **2 pts : Dans la figure** 3**, on a** $z(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$**. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution** X_1**.**
  Dans la figure 1**, on a** $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$**. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution** X_1 **donc cette figure ne correspond pas à** X_1**.**
  Par élimination, la figure 2 **correspond à la solution** X_1**. De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que** $x_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 3$**,** $y_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ **et** $z_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -2$**.**

13. Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

a) On fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et on considère la solution de (S) :

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1$$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \mathrm{e}^{tA} C$.

- **2 pts : calcul correct**

b) Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

- **1 pt : la formule obtenue est analogue**

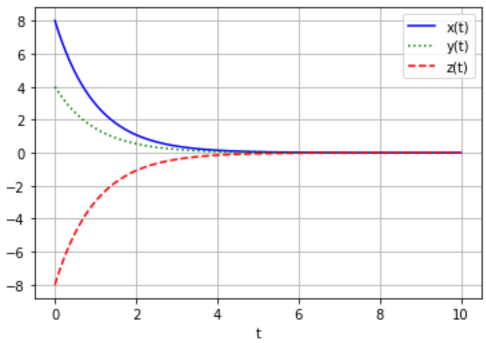

Fig. 1 Tracé 1

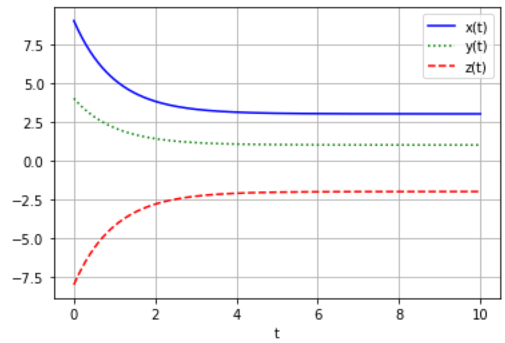

Fig. 2 Tracé 2

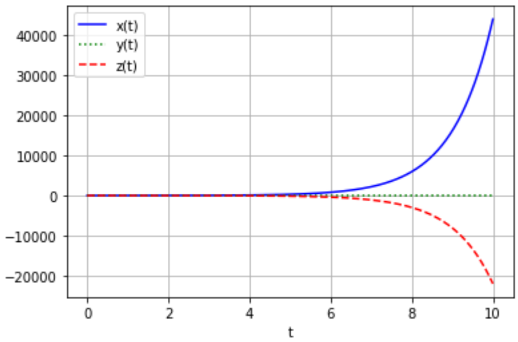

Fig. 3 Tracé 3

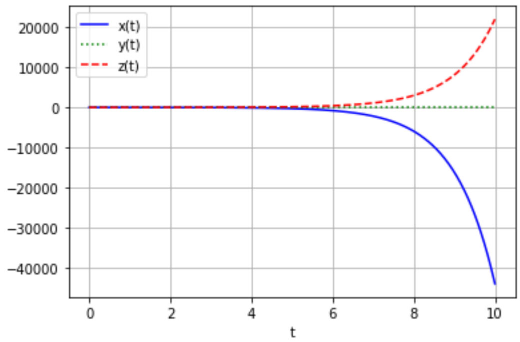

Fig. 4 Tracé 4

Problème 2 - Une propriété limite des lois de Pareto

Question préliminaire

Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

1. a) Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt = \int_0^1 g\big(\alpha+(\beta-\alpha)x\big)\ dx$$

- **1 pt** : g est continue sur l'intervalle I donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt$ est bien définie
- **1 pt** : On effectue le changement de variable $\boxed{x = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\ t - \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}}$
- **1 pt** : Ce changement de variable est valide car $\psi : x \mapsto (\beta-\alpha)\,x+\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

b) Soit a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$.
On suppose g décroissante sur I, établir l'encadrement :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\ dt \leqslant \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\ dt \leqslant \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\ dt$$

- **1 pt** : mise sous forme normale en vérifiant les hypothèses de la question 1
- **1 pt** : $\forall x \in [0,1],\ \ g\big(c+(d-c)\ x\big)\ \geqslant\ g\big(c+(b-c)\ x\big)$
- **1 pt** : D'après ce qui précède, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$: $\displaystyle\int_0^1 g\big(c+(d-c)\ x\big)\ dx \geqslant \int_0^1 g\big(c+(b-c)\ x\big)\ dx$

- **1 pt** : $\forall x \in [0,1],\ \ g\big(a+(d-a)\ x\big)\ \geqslant\ g\big(c+(d-c)\ x\big)$
- **1 pt** : D'après ce qui précède, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$: $\displaystyle\int_0^1 g\big(a+(d-a)\ x\big)\ dx \geqslant \int_0^1 g\big(c+(d-c)\ x\big)\ dx$

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

- Pour tout réel x positif ou nul :
  - on note $[x]$ la *partie entière* de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier naturel n qui vérifie l'encadrement : $n \leqslant x < n+1$.
  - on note $\big\{x\big\} = x - [x]$, que l'on appelle la *partie fractionnaire* de x.

  Par exemple, si $x = 12,34$, alors $[x] = 12$ et $\{x\} = 0,34$.
- Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité f qui vérifie les propriétés :
  - f est nulle sur $]-\infty, 0[$;
  - la restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et décroissante.

  On pose $M = f(0)$, c'est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $Y = \big\{X\big\} = X - \big[X\big]$, la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de X.
On note F_Y la fonction de répartition de Y.

2. Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y < 0$? Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y \geqslant 1$?
On justifiera les réponses.

- **1 pt** : $Y(\Omega) \subset [0,1[$
- **1 pt** : si $y \in\ ]-\infty, 0[$, alors : $[Y \leqslant y] = \varnothing$ et donc $F_Y(y) = 0$
- **1 pt** : si $y \in [1, +\infty[$, alors : $[Y \leqslant y] = \Omega$ et donc $F_Y(y) = 1$

3. Justifier l'égalité entre évènements : $[Y = 0] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [X = n]$.
En déduire : $F_Y(0) = 0$.

- **1 pt** : $[Y = 0] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [X = n]$
- **1 pt** : $[Y \leqslant 0] = [Y = 0]$
- **1 pt** : les événements de la famille $\big([X = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles
- **1 pt** : conclusion avec l'additivité de l'application probabilité et le fait que X est à densité

4. Soit y un réel de l'intervalle $]0,1[$.

a) Montrer l'égalité : $F_Y(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\ dt$.

- **1 pt** : La famille $\big([T = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, où $T = [X]$
- **1 pt** : par la formule des probabilités totales : $F_Y(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T = n] \cap [X - T \leqslant y]\big)$
- **1 pt** : f est une densité de X donc $[n \leqslant X \leqslant n+y] = \displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt$
- **1 pt** : $F_Y(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\ dt$ sans arnaque

b) Montrer, en utilisant la question préliminaire, les inégalités :

– Pour tout n entier naturel : $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt \geqslant y \int_n^{n+1} f(t)\ dt$.

- **1 pt** : vérification des hypothèses pour utiliser la question préliminaire
- **1 pt** : calculs corrects ($c = n$, $d = n + y$ et $b = n + 1$)

– Pour tout n entier naturel non nul : $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt \leqslant y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt$.

- **1 pt** : vérification des hypothèses pour utiliser la question préliminaire
- **1 pt** : calculs corrects ($a = n - 1 + y$ et $c = n$ et $d = n + y$)

c) En déduire : $\displaystyle y \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \leqslant F_Y(y) \leqslant \int_0^{y} f(t)\ dt + y \int_y^{+\infty} f(t)\ dt$, puis l'encadrement :

$$y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M$$

- **1 pt** : $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \geqslant y \int_0^{m+1} f(t)\ dt$
- **1 pt** : les deux termes admettent une limite quand m tend vers $+\infty$
- **1 pt** : par passage à la limite : $\displaystyle y \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \ \leqslant\ F_Y(y)$
- **1 pt** : $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt - \int_0^{y} f(t)\ dt \leqslant y \int_y^{m+y} f(t)\ dt$
- **1 pt** : par passage à la limite dans l'inégalité : $\displaystyle F_Y(y) \ \leqslant\ \int_0^{y} f(t)\ dt + y \int_y^{+\infty} f(t)\ dt$
- **1 pt** : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1$
- **1 pt** : $\displaystyle y \int_y^{+\infty} f(t)\ dt \ \leqslant\ y$
- **2 pt** : $\displaystyle\int_0^{y} f(t)\ dt \ \leqslant\ M$

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel λ strictement positif, on définit la fonction g_λ sur $\mathbb{R}$ par $g_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

5. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, g_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (loi dite *de Pareto*).

- **1 pt** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) \geqslant 0$
- **1 pt** : g_λ est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$
- **1 pt** : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt = \int_1^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt$ car g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$
- **1 pt** : $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt = 1$ ($\lambda > 0$ donc $\lambda + 1 > 1$)

Dans toute la suite, on note Z_λ une variable aléatoire admettant g_λ pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition G_λ de Z_λ.

- **1 pt** : pour tout $x < 1$, $G_\lambda(x) = 0$
- **1 pt** : pour tout $x \geqslant 1$, $G_\lambda(x) = 1 - \frac{1}{x^\lambda}$

7. On note ln la fonction *logarithme népérien*, et log la fonction *logarithme décimal*.

Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel x strictement positif.

On pose $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$, et on note F_λ la fonction de répartition de X_λ.

a) Établir, pour tout réel x, l'égalité : $F_\lambda(x) = G_\lambda\big(10^x\big)$.

- **1 pt** : $\ln(10) > 0$
- **1 pt** : $x\ln(10) = \ln(10^x)$
- **1 pt** : la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que X_λ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre en fonction de λ.

- **1 pt** : $10^x < 1 \iff x < 0$
- **1 pt** : pour tout $x > 0$, $F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda\ln(10)x}$
- **1 pt** : X_λ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda\ln(10)$

8. ***a)*** On pose $Y_\lambda = \big\{X_\lambda\big\}$, la partie fractionnaire de X_λ.

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour tout réel y de l'intervalle $]0, 1[$:

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \mathbb{P}\big(\,[Y_\lambda \leqslant y]\,\big) = y$$

- **1 pt** : la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\ln(10)e^{-\lambda\ln(10)} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

  est une densité de X_λ et vérifie les hypothèses de la partie I
- **1 pt** : pour $y \in]0, 1[$, on a $y \leqslant F_{Y_\lambda}(y) \leqslant y + M_\lambda$ où $M_\lambda = \lambda\ln(10)$ (maximum de f_λ sur $\mathbb{R}$)
- **1 pt** : pour $y \in]0, 1[$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \mathbb{P}\big(\,[Y_\lambda \leqslant y]\,\big) = y$ par théorème d'encadrement

b) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire que, lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

- **1 pt** : pour $y \geqslant 1$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \mathbb{P}\big(\,[Y_\lambda \leqslant y]\,\big) = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} 1 = 1$
  pour $y \leqslant 0$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \mathbb{P}\big(\,[Y_\lambda \leqslant y]\,\big) = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} 0 = 0$

9. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on note $\alpha(x)$ le premier chiffre dans l'écriture décimale de x. C'est un entier de l'intervalle $[\![1, 9]\!]$.

Par exemple, $\alpha(50) = 5$ et $\alpha(213,43) = 2$.

a) Pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$, montrer l'équivalence :

$$\alpha(x) = k \;\Leftrightarrow\; \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[$$

- **1 pt** : écriture de x sous la forme $x = \alpha(x)10^d + r(x)$ avec $r(x) < 10^d$ et $d \in \mathbb{N}$
- **2 pt** : $d = [\log(x)]$
- **1 pt** : $\big[10^{\{\log(x)\}}\big] = \alpha(x)$

- **1 pt** : $\big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[\iff k = \big[10^{\{\log(x)\}}\big]$

b) On note $C_\lambda = \alpha\big(Z_\lambda\big)$ la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de Z_λ.

Montrer, pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$: $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([C_\lambda = k]\big) = \log\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.

Cette loi limite obtenue pour le premier chiffre de Z_λ est appelée *loi de Benford*.

- **1 pt** : $[C_\lambda = k] = [\log(k) \leqslant Y_\lambda < \log(k+1)]$
- **1 pt** : par convergence en loi : $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([C_\lambda = k]\big) = \mathbb{P}\big([\log(k) \leqslant U < \log(k+1)]\big)$ où U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$
- **1 pt** : $\mathbb{P}\big([\log(k) \leqslant U < \log(k+1)]\big) = \log(k+1) - \log(k) = \log(1 + \frac{1}{k})$ car $\log(k) \in [0, 1]$ et $\log(k+1) \in [0, 1]$