DS6 (Maths I - version A)

Exercice 1

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\ (x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.$.

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

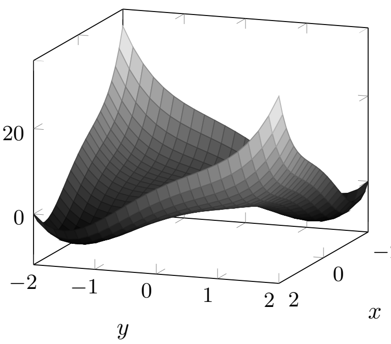
4. ***a)*** Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

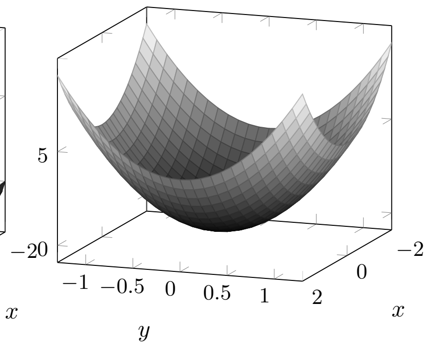
5. ***a)*** Compléter la deuxième ligne du programme suivant afin de définir la fonction f en **Python**.

```
1  def f(x,y):
2      return ................
```

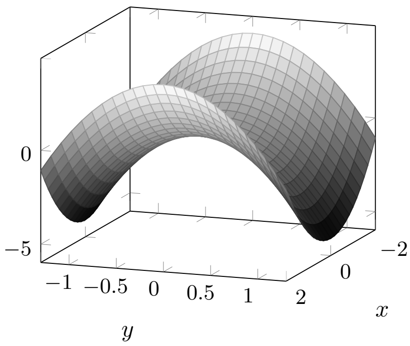
b) On utilise la fonction précédente pour tracer le graphe de f et **Python** renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 2

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité

2. ***a)*** Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

3. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4. ***a)*** Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.

b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 2\,(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

5. On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$.
On pose $I = \min(U,V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \min(\ U(\omega), V(\omega)\ )$.
On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $\mathbb{P}\big([I > x]\big) = \mathbb{P}\big([U > x] \cap [V > x]\big)$.
Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.

b) En déduire que I suit la même loi que Y.

6. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \geqslant 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $I_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Déterminer la fonction de répartition de I_n puis `(CUBES UNIQUEMENT)` montrer que la suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

7. Simulation informatique de la loi de Y.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
def SimuY():
    U = ......
    V = ......
    if U < V:
        return ......
    else:
        return ......
```

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}. On pose $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Expliciter $\mathrm{Sp}(T)$. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

On considère maintenant les systèmes différentiels linéaires suivants :

$$(S_A) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) & + & x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & & \\ x_3'(t) & = & & & x_2(t) & + & x_3(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_T) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & + & y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & & 2y_2(t) & + & y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

3. Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

4. Soit $Y = P^{-1}X$. On note alors, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si Y est solution de (S_T).

5. ***a)*** Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto at\mathrm{e}^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + a\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_2)$$

c) Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + bt\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

6. On fixe Y une solution de (S_T).

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3(t) = y_3(0)\mathrm{e}^{2t}$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$.

c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $y_1(t)$ similaire aux expressions précédentes.

7. On fixe X une solution de (S_A).

a) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) & = (\lambda_2 + \lambda_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) & = \left((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \\ x_3(t) & = \left((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

b) Montrer que si la trajectoire associée à X est convergente, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Interpréter.

Exercice 4

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Expliciter $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.

c) Justifier : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] \;=\; [X_n = n]$.

d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.

e) En déduire que : $\mathbb{P}(V_n) \;=\; 3\,\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3\,\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $\mathbb{P}(V) = 0$.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

a) On rappelle qu'en **Python** la commande `rd.randint(a,b)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a, b-1]\!]$.
Compléter la fonction **Python** ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
import numpy.random as rd
def SimuT():
    X,Y,Z,n = 0,0,0,0
    liste = [X, Y, Z]
    while ....................
        i = rd.randint(0,3) # choix d'un entier entre 0 et 2
        liste[i] = ....................
        n = n+1
    return ....................
```

b) Écrire un script **Python** qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

4. Déterminer $T(\Omega)$.

5. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([T = n] \big) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n)$.

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. ***a)*** Donner la loi du couple (X_2, W_2).

b) En déduire la loi de W_2, et calculer son espérance.

c) Calculer la covariance de X_2 et W_2.

d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

8. Déterminer $W_n(\Omega)$.

9. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

a) Démontrer : $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

c) Exprimer alors $\mathbb{E}(W_n)$ en fonction de n.

10. Démontrer : $\mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \Big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 2] \Big)$?

11. Démontrer : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \Big) = \dfrac{2 \dbinom{n}{k}}{3^n}$.

Que vaut $\mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 1] \Big)$?

12. Démontrer :

$$\mathbb{E}(X_n\, W_n) \;=\; 2\, n\, \mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \Big) + \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \Big)$$

13. Démontrer alors : $\mathbb{E}(X_n\, W_n) = n\, \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Puis calculer la covariance de X_n et W_n.

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.