DS6 barème (Maths I - version A)

Exercice 1 (EDHEC 2017)

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\ (x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- **1 pt : f est polynomiale**

2. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

- **1 pt : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$**
- **1 pt :** $\partial_1(f)(x, y) = 4x^3 - 4\ (x - y) = 4x^3 - 4x + 4y$
- **1 pt :** $\partial_2(f)(x, y) = 4y^3 - 4\ (x - y)\ (-1) = 4y^3 + 4x - 4y$

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right.$.

- **1 pt :** $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right.$

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

- **1 pt : (x, y) est un point critique de f** $\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 & = & (-x)^3 \end{array} \right.$
- **1 pt : la fonction $t \mapsto t^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (ou est injective)**
- **1 pt :** $\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y & = & -x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x\ (x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2}) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array} \right.$

3. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

- **1 pt : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.**
- **1 pt :** $\partial^2_{11}(f)(x, y) = 4\ (3x^2 - 1)$
- **1 pt :** $\partial^2_{12}(f)(x, y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x, y)$
- **1 pt :** $\partial^2_{22}(f)(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)$

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

- **1 pt :** $\nabla^2(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

- **1 pt : λ est une valeur propre de H $\iff$ $H - \lambda\ I$ n'est pas inversible $\iff$** $\det(H - \lambda\ I) = 0$

- **1 pt :** $\nabla^2(f)(0,0)$ **admet pour valeurs propres** 0 **et** -8
- **1 pt :** $\nabla^2(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ **et** $\nabla^2(f)(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ **admettent pour valeurs propres** 16 **et** 24
- **1 pt : Ces deux matrices admettent deux valeurs propres strictement positives. On en déduit que** f **admet un minimum local en** $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ **et en** $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
- **1 pt : Ce minimum local a pour valeur** $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8 = f(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x=0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

- **1 pt :** $f(x,x) = x^4 + x^4 - 2\ (x-x)^2 = 2\ x^4 > 0$ **si** $x \neq 0$
- **1 pt :** $f(x,-x) = 2x^2\ (x^2-4) = 2x^2\ (x-2)\ (x+2) \underset{x\to 0}{\sim} -8x^2 < 0$ **si** $x \neq 0$ **est proche de** 0
- **1 pt :** $f(0,0) = 0$ **donc il n'y a pas d'extremum au point** $(0,0)$

4. a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

- **2 pts :** $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 = -8$

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

- **1 pt :** $f(x,y) = f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) + \Big((x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\Big) \geqslant f(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ **donc la fonction** f **admet aux points** $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ **et** $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ **un minimum global**

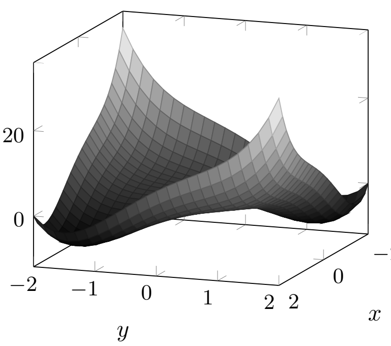
5. a) Compléter la deuxième ligne du programme suivant afin de définir la fonction f en **Python**.

```
1 def f(x,y):
2     return ................
```

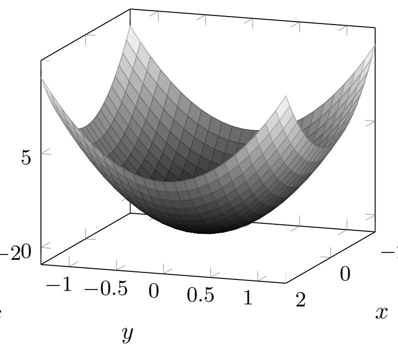
- **1 pt : Il suffit de recopier la définition de la fonction** f**.**

```
2     return x**4 + y**4 - 2 * (x - y)**2
```

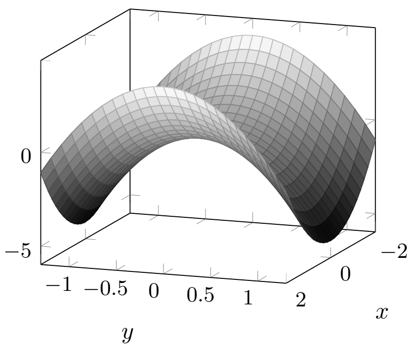
b) On utilise la fonction précédente pour tracer le graphe de f et **Python** renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

- **1 pt : On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.**
- **1 pt : On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).**

Exercice 2 (EDHEC 2013)

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\, dx$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 (1-t)\, dt = \frac{1}{2}$
- **1 pt :** f **est paire**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\, dt = \frac{1}{2}$

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

- **1 pt : La fonction** f **est continue sauf éventuellement en** -1 **et** 1
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $f(x) \geqslant 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ **converge et vaut** 1

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2. a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

- **1 pt : La v.a.r.** X **admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ **est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment**
- **1 pt :** f **est nulle en dehors de** $[-1,1]$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = 0$ **car** $t \mapsto tf(t)$ **est impaire (ou par calcul)**

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

- **1 pt : La v.a.r.** X **admet une variance si et seulement si l'intégrale impropre** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\, dt$ **est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{1}{6}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{6}$ **d'après la formule de Koenig-Huygens**

3. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < -1 \\[1ex] \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\[1ex] \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\[1ex] 1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$$

- **1 pt :** f **est nulle en dehors de** $[-1,1]$ **donc on peut considérer que** $X(\Omega) = [-1,1]$

- **1 pt : cas triviaux**
- **2 pts :** $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \textbf{si } x \in [-1, 0[\\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \textbf{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4. ***a)*** Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.

- **1 pt :** $Y(\Omega) = [0, 1]$
- **1 pt :** $\forall x \in\,]-\infty, 0[$**,** $F_Y(x) = 0$

b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

- **1 pt :** $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x])$
- **1 pt :** $F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x)$ **car** X **est à densité**

c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **1 pt : dérivation sur les intervalles ouverts.**
- **1 pt : disjonction de cas** $x \in [0, 1]$ **et** $x > 1$
- **1 pt : choix des valeurs arbitraires**

d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

- **1 pt : rédaction**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{3}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y^2) = \dfrac{1}{6}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{18}$

5. On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.
On pose $I = \min(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \min(U(\omega), V(\omega))$.
On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $\mathbb{P}\left([I > x]\right) = \mathbb{P}([U > x] \cap [V > x])$.
Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.

- **1 pt :** $I(\Omega) = [0, 1]$
- **1 pt : cas triviaux**
- **1 pt :** U **et** V **sont indépendantes**
- **1 pt :** U **et** V **suivent la même loi uniforme sur** $[0, 1]$

- **1 pt :** $F_I : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^2 & \textbf{si } x \in [0,1] \\ 1 & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$

b) En déduire que I suit la même loi que Y.

- **1 pt : calcul d'une densité de I**
- **1 pt : I et Y possèdent une densité en commun donc I et Y ont la même fonction de répartition, or la fonction de répartition caractérise la loi**

6. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \geqslant 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

- **2 pts :** $F_{I_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \textbf{si } x \in [0,1] \\ 1 & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$
- **1 pt : les v.a.r. X_1, …, X_n sont indépendantes**
- **1 pt : les v.a.r. X_1, …, X_n ont même loi**
- **2 pts :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{I_n}(x) = F(x)$, **où** $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
- **1 pt : (I_n) converge en loi vers Z, une v.a.r. constante égale à 0**

7. Simulation informatique de la loi de Y.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
def SimuY():
    U = ......
    V = ......
    if U < V:
        return ......
    else:
        return ......
```

- **1 pt :** `U = rd.random()` **et** `V = rd.random()`
- **1 pt :** `return U` **et** `return V`
- **1 pt : code complet et juste**

```
def SimuY():
    U = rd.random()
    V = rd.random()
    if U < V:
        return U
    else:
        return V
```

Exercice 3 (sujet maison)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}. On pose $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : P est inversible**
- **2 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **ou** $AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Expliciter $\mathrm{Sp}(T)$. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

- **1 pt : La matrice T est triangulaire supérieure donc ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(T) = \{2\}$
- **1 pt : la matrice A est semblable à la matrice T d'après la question précédente, donc** $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(T) = \{2\}$
- **2 pts : raisonnement par l'absurde**

On considère maintenant les systèmes différentiels linéaires suivants :

$$(S_A) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) & + & x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & & \\ x_3'(t) & = & & & x_2(t) & + & x_3(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_T) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & + & y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & & 2y_2(t) & + & y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

3. Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

- **1 pt : équivalence bien écrite**

4. Soit $Y = P^{-1}X$. On note alors, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si Y est solution de (S_T).

- **1 pt :** $X'(t) = AX(t) \iff Y'(t) = TY(t)$
- **1 pt : reste de l'équivalence**

5. ***a)*** Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

- **1 pt : les solutions sont de la forme** $\varphi : t \mapsto c\mathrm{e}^{2t}, \qquad c \in \mathbb{R}$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto at\mathrm{e}^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + a\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_2)$$

- **1 pt : $f'(t) = 2f(t) + a\mathbf{e}^{2t}$**

c) Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + bt\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

- **1 pt : f est solution de $(\mathscr{E}_3)$ $\iff$ C est une primitive de $t \mapsto bt$**
- **1 pt : $f : t \mapsto \frac{1}{2}bt^2\mathbf{e}^{2t}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E}_3)$**

6. On fixe Y une solution de (S_T).

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3(t) = y_3(0)\mathrm{e}^{2t}$.

- **1 pt :**

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$.

- **1 pt : y_2 est solution de l'équation différentielle avec second membre**

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + y_3(0)\mathbf{e}^{2t}$$

- **1 pt : d'après la question 5b, la fonction $f : t \mapsto y_3(0)t\mathbf{e}^{2t}$ est une solution particulière. On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,**

$$y_2(t) = c\mathbf{e}^{2t} + y_3(0)t\mathbf{e}^{2t}$$

c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $y_1(t)$ similaire aux expressions précédentes.

- **1 pt : y_1 est solution de l'équation différentielle avec second membre**

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + y_2(0)\mathbf{e}^{2t} + y_3(0)t\mathbf{e}^{2t}$$

- **1 pt : référence à la question 5b, la question 5c et le principe de superposition**
- **1 pt : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,**

$$y_1(t) = c\mathbf{e}^{2t} + y_2(0)t\mathbf{e}^{2t} + \frac{1}{2}y_3(0)t^2\mathbf{e}^{2t}$$

7. On fixe X une solution de (S_A).

a) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) &= (\lambda_2 + \lambda_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) &= \left((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \\ x_3(t) &= \left((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

- **1 pt : calcul correct**
- **1 pt : $\lambda_1 = y_1(0)$, $\lambda_2 = y_2(0)$ et $\lambda_3 = y_3(0)$**

b) Montrer que si la trajectoire associée à X est convergente, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Interpréter.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : obtention d'un λ_i nul**
- **1 pt : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$**
- **1 pt : le système différentiel linéaire (S_A) possède une unique trajectoire convergente : le point d'équilibre $(0, 0, 0)$. Toutes les autres trajectoires du système sont divergentes. L'unique point d'équilibre du système est donc instable.**

Exercice 4 (ECRICOME 2022)

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.

- **1 pt : L'expérience aléatoire consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{1}{3}$ (probabilité que le pion soit placé dans l'urne 1)**
- **1 pt : La v.a.r. X_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience**
- **1 pt : X_n suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$ (et idem pour Y_n et Z_n)**

b) Expliciter $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

c) Justifier : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.

- **1 pt : équivalence bien écrite**

d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.

- **1 pt : équivalence bien écrite**
- **1 pt :** $V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$

e) En déduire : $\mathbb{P}(V_n) = 3 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

- **1 pt : formule du crible**
- **1 pt :** $[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = \varnothing$
- **1 pt : utilisation des questions précédentes et fin du calcul**

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $\mathbb{P}(V) = 0$.

- **1 pt :** $V = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} V_k$
- **1 pt :** $V_{k+1} \subset V_k$
- **1 pt : thm de la limite monotone**
- **1 pt :** $\frac{2}{3} \in \,]-1, 1[$ **et** $\frac{1}{3} \in \,]-1, 1[$

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

a) On rappelle qu'en **Python** la commande `rd.randint(a,b)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a, b-1]\!]$.

Compléter la fonction **Python** ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
import numpy.random as rd
def SimuT():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
    liste = [X, Y, Z]
    while ....................
        i = rd.randint(0,3) # choix d'un entier entre 0 et 2
        liste[i] = ....................
        n = n+1
    return ....................
```

- **1 pt :**

```
    while liste[0] == 0 or liste[1] == 0 or liste[2] == 0
```

- **1 pt :**

```
        liste[i] = liste[i] + 1
```

- **1 pt :**

```
    return n
```

- **1 pt : point de bonification si tout est juste**

b) Écrire un script **Python** qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

- **1 pt :**

```
N = 10 000
tabT = np.zeros(N)
```

- **1 pt :**

```
for i in range(N):
    tabT[i] = SimuT()
```

- **1 pt :**

```
print(np.mean(tabT))
```

- **1 pt : point de bonification si tout est juste**

4. Déterminer $T(\Omega)$.

- **1 pt :** $T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$

- **1 pt : La v.a.r. T ne peut pas prendre les valeurs 0, 1 ou 2 car il faut a minima 3 jetons pour que chacune des 3 urnes contiennent au moins 1 jeton.**
- **1 pt : La v.a.r. T peut prendre la valeur $k \geqslant 3$. C'est par exemple le cas lorsque :**
  - **l'urne 1 reçoit le jeton 1,**
  - **l'urne 2 reçoit les jetons 2, 3, ..., $k-1$,**
  - **l'urne 3 reçoit finalement le jeton k.**

5. Démontrer : $\forall n \in T(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([T=n]\big) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n)$.

- **2 pts : $[T=n] \cup V_n \;=\; V_{n-1}$ (1 pt par inclusion)**
- **1 pt : $[T=n]$ et V_n sont incompatibles**

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

- **1 pt : La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 3} k\ \mathbb{P}\big([T=k]\big)$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car cette série est à termes positifs.**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=3}^{N} k\ \mathbb{P}\big([T=k]\big) = \sum\limits_{k=2}^{N-1} (k+1)\ \mathbb{P}\big(V_k\big) \ - \ \sum\limits_{k=3}^{N} k\ \mathbb{P}\big(V_k\big)$ (par décalage d'indice)**
- **1 pt : reconnaissance de sommes géométriques avec $q \neq 1$**
- **1 pt : $N\ \mathbb{P}\big(V_N\big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$**
- **2 pts : $\mathbb{E}(T) \;=\; 3 + \dfrac{15}{6} \;=\; \dfrac{18}{6} + \dfrac{15}{16} \;=\; \dfrac{33}{6} \;=\; \dfrac{11}{2}$**

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. ***a)*** Donner la loi du couple (X_2, W_2).

- **1 pt : $X_2(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et $W_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X_2=0] \cap [W_2=1]\big) = \dfrac{2}{9}$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X_2=0] \cap [W_2=2]\big) = \dfrac{2}{9}$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X_2=1] \cap [W_2=1]\big) = \dfrac{4}{9}$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X_2=1] \cap [W_2=2]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X_2=2] \cap [W_2=1]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([X_2=2] \cap [W_2=2]\big) = \dfrac{1}{9}$**
- **1 pt : argument d'indépendance cité au moins une fois**
- **1 pt : argument d'incompatibilité cité au moins une fois**

b) En déduire la loi de W_2, et calculer son espérance.

- **1 pt : $\mathbb{P}\big([W_2=1]\big) = \dfrac{2}{3}$**
- **1 pt : $\mathbb{P}\big([W_2=2]\big) = \dfrac{1}{3}$**
- **1 pt : FPT avec le sce $\big([X_2=i]\big)_{i\in[\![0,2]\!]}$**

- **1 pt : W_2 est finie donc admet donc une espérance.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(W_2) = \dfrac{4}{3}$

c) Calculer la covariance de X_2 et W_2.

- **1 pt : Les v.a.r. X_2 et W_2 sont finies. Elles admettent donc chacune un moment d'ordre 2. Donc X_2 et W_2 admettent une covariance**
- **1 pt : formule de Koenig-Huygens :** $\mathrm{Cov}(X_2, W_2) = \mathbb{E}(X_2\, W_2) - \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(W_2)$
- **1 pt : Par théorème de transfert :** $\mathbb{E}(X_2\, W_2) = \sum\limits_{i=0}^{2} \left(\sum\limits_{j=1}^{2} i\, j\, \mathbb{P}\big([X_2 = i] \cap [W_2 = j] \big) \right)$
- **1 pt :** $\mathrm{Cov}(X_2, W_2) = \dfrac{8}{9} - \dfrac{8}{9} = 0$

d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1] \big) \ = \ 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \big) \times \mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big) \ \neq \ 0$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

8. Déterminer $W_n(\Omega)$.

- **1 pt :** $W_n(\Omega) = [\![0, 2]\!]$
- **1 pt : W_n ne peut pas prendre la valeur 3 car $n \geqslant 1$**
- **1 pt : W_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2 car $n \geqslant 3$**

9. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

a) Démontrer : $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

- **1 pt : $W_{n,i}$ suit une loi de Bernoulli**
- **1 pt : de paramètre $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$**

b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

- **1 pt :** $W_n \ = \ W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$
- **1 pt : explications raisonnables ($W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ compte le nombre d'urnes vides après le placement des n premiers jetons)**

c) Exprimer alors $\mathbb{E}(W_n)$ en fonction de n.

- **1 pt : La v.a.r. W_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(W_n) = 3 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

10. Démontrer : $\mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \Big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 2] \Big)$?

- **1 pt :** $[X_n = n] \ \subset \ [W_n = 2]$ **donc** $\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \big) = \mathbb{P}\big([X_n = n] \big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

- **1 pt :** $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 2]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

11. Démontrer : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\Big) = \dfrac{2\dbinom{n}{k}}{3^n}$.

Que vaut $\mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 1]\Big)$?

- **1 pt : l'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ est réalisé si et seulement si, après répartition des n premiers jetons, l'urne 1 contient k jetons et les $n-k$ restants sont tous dans l'urne 2 ou tous dans l'urne 3.**
- **1 pt : On a alors :**
  - × 2 **possibilités pour le numéro de l'urne contenant les $n-k$ jetons restants (l'urne 2 ou l'urne 3),**
  - × $\dbinom{n}{k}$ **possibilités pour les numéros des k jetons placés dans l'urne 1.**
- **1 pt : Il y a de plus 3^n possibilités pour placer les n premiers jetons dans les 3 urnes U_1, U_2 et U_3.**
- **1 pt : le placement s'effectue de manière équiprobable**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 1]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

12. Démontrer :

$$\mathbb{E}(X_n\, W_n) \;=\; 2\, n\, \mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 2]\Big) + \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\Big)$$

- **1 pt :** $X_n\, W_n$ **admet une espérance**
- **1 pt : Par théorème de transfert :** $\mathbb{E}(X_n\, W_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{2} k\, j\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = j]\big)\right)$
- **1 pt : utilisation de la question *10***
- **1 pt : utilisation de la question *11***

13. Démontrer alors : $\mathbb{E}(X_n\, W_n) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Puis calculer la covariance de X_n et W_n.

- **1 pt :** $k\dbinom{n}{k} \;=\; n\dbinom{n-1}{k-1}$
- **1 pt : reconnaissance formule du binôme**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n\, W_n) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
- **1 pt :** $\mathrm{Cov}(X_n, W_n) = 0$

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 1]\big) \;=\; 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n = n] \times [W_n = 1]\big) \;>\; 0$
- **1 pt : on a un nouveau contre-exemple (comme à la question *7.d)*)**