DS6 (Maths I - version A)

Exercice 1

On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\ (x-y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Commentaire

Il faut rappeler que
- la somme de deux fonctions polynomiales est une fonction polynomiale
- le produit de deux fonctions polynomiales est une fonction polynomiale
- l'élévation à une puissance entière positive d'une fonction polynomiale est une fonction polynomiale

Ainsi, f est une fonction polynomiale et il ne faut pas la décomposer en somme, produit, composée ...

2. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Commentaire

Il y a une différence importante entre
- $4x = 0 \iff x = 0$ (toujours vrai)
- $4x = x$ (en général faux)

Plusieurs élèves ont simplifié les dérivées par 4 à cause de la question suivante. Il s'agit d'une grosse erreur de calcul et cela rend tous les calculs suivants faux.

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right.$.

Commentaire

Il fallait simplement simplifier les équations par 4 pour obtenir ce système. Malheureusement, comme dit dans la question précédente, cela a fait croire à beaucoup d'élèves que l'on devait dériver $x^3 - x + y$ et $y^3 + x - y$ pour obtenir les dérivées d'ordre 2. Il n'en est rien bien entendu.

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Commentaire

Cela ne suffit pas de vérifier que ces trois points sont bien des points critiques. Il faut vérifier que ce sont bien les seuls également. Il faut donc raisonner par équivalence et résoudre le système de la question précédente.

3. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

> **Commentaire**
>
> La formule $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ n'a pas trouvé un grand succès. Beaucoup d'élèves développent et se retrouvent à manipuler de grands nombres (400) au lieu de factoriser grâce à cette identité remarquable. Les calculs sont nécessairement plus compliqués quand on développe au lieu de factoriser.

d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

> **Commentaire**
>
> Calculer la limite lorsque $x \to 0$ n'a aucun intérêt puisque cela ne renseigne pas sur le signe. Par contre, calculer un équivalent lorsque $x \to 0$ peut permettre de déterminer le signe des quantités en jeu dans un voisinage de $x = 0$.

4. a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

> **Commentaire**
>
> Une question purement calculatoire, et pour une fois il fallait développer.

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

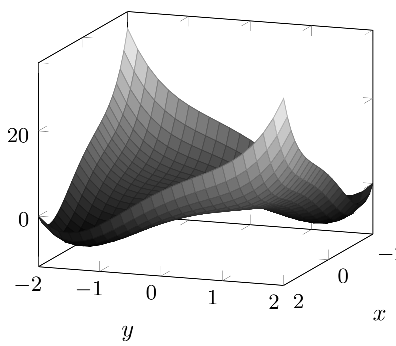
> **Commentaire**
>
> Il fallait ici se souvenir de la méthode de cours et comparer $f(x,y)$ à $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

5. a) Compléter la deuxième ligne du programme suivant afin de définir la fonction f en **Python**.

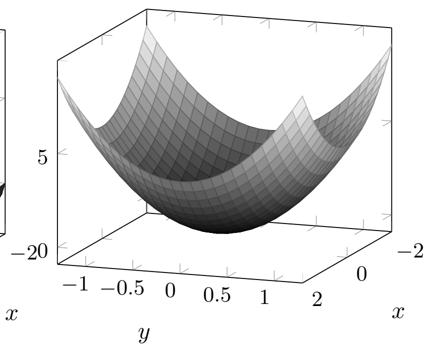
```
def f(x,y):
    return ................
```

> **Commentaire**
>
> Il est incroyable de ne pas même essayer de répondre à cette question qui ne comporte aucune difficulté.

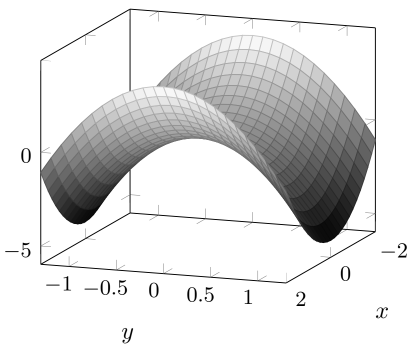
b) On utilise la fonction précédente pour tracer le graphe de f et **Python** renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 2

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Commentaire

Il est temps de connaître la fonction valeur absolue.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

Commentaire

Il n'est pas possible de ne pas savoir comment simplifier $|t|$. « En déduire sans calcul » doit nous faire penser à un argument de parité. De manière générale, il faut penser aux arguments de parité lorsqu'on calcule des intégrales.

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

Commentaire

Méthode de cours. Ne pas la connaître signifie que le travail d'apprentissage est soit inexistant soit inefficace.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité

2. *a)* Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

Commentaire

Méthode de cours. Ne pas la connaître signifie que le travail d'apprentissage est soit inexistant soit inefficace. Penser à la parité.

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

Commentaire

Méthode de cours. Ne pas la connaître signifie que le travail d'apprentissage est soit inexistant soit inefficace. Penser à la parité.

3. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4. *a)* Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.

Commentaire

Il faut penser à calculer $Y(\Omega)$.

b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

Commentaire

La question a été mal lue. Il faut arrêter le calcul lorsqu'on fait apparaître F_X. Attention aux différents cas, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ a souvent été mal simplifiée lorsque $x \in [0,1]$.

c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 2\,(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commentaire

Question très mal rédigée. Il fallait bien choisir les valeurs en 0 et en 1 après avoir dérivé sur les intervalles ouverts, pour retrouver la fonction g. Il ne fallait pas poser $g(0) = 0$ mais $g(0) = 2$.

d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

Commentaire

Tout le monde aurait du prendre les points de cette question. On peut repartir de la question précédente même si on ne l'a pas réussie, et la fonction g est très simple. Il est scandaleux de n'avoir que 6 élèves dans la classe qui réussissent entièrement cette question. Il n'y a aucune difficulté de calcul.

5. On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$.
On pose $I = \min(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \min(\ U(\omega), V(\omega)\ )$.
On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $\mathbb{P}\big([I > x]\big) = \mathbb{P}\big([U > x] \cap [V > x]\big)$.
Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.

Commentaire

Méthode de cours. Ne pas la connaître signifie que le travail d'apprentissage est soit inexistant soit inefficace. Un bon apprentissage du cours permettait de voir qu'il y avait une coquille dans l'énoncé.

b) En déduire que I suit la même loi que Y.

6. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geqslant 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de I_n puis `(CUBES UNIQUEMENT)` montrer que la suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Commentaire

Méthode de cours. Ne pas la connaître signifie que le travail d'apprentissage est soit inexistant soit inefficace.

7. Simulation informatique de la loi de Y.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
def SimuY():
    U = ......
    V = ......
    if U < V:
        return ......
    else:
        return ......
```

Commentaire

Même si on ne comprend pas la fonction **Python**, on peut écrire `U = rd.random()` et `V = rd.random()` puisque l'énoncé dit que U et V suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. Ceci est à la porté de tout le monde.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}. On pose $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Commentaire

Question purement calculatoire plutôt bien réussie.

2. Expliciter $\mathrm{Sp}(T)$. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Commentaire

Il fallait avoir en tête que deux matrices semblables ont le même spectre. Cela a été plutôt bien vu dans l'ensemble.

On considère maintenant les systèmes différentiels linéaires suivants :

$$(S_A) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) & + & x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & & \\ x_3'(t) & = & & & x_2(t) & + & x_3(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_T) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & + & y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & & 2y_2(t) & + & y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

3. Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

Commentaire

Méthode de cours. Ne pas la connaître signifie que le travail d'apprentissage est soit inexistant soit inefficace.

4. Soit $Y = P^{-1}X$. On note alors, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si Y est solution de (S_T).

Commentaire

Méthode de cours. Ne pas la connaître signifie que le travail d'apprentissage est soit inexistant soit inefficace.

5. a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

Commentaire

- Soit on donne l'ensemble des solutions : $S_0 = \{t \mapsto C\mathrm{e}^{2t} \mid C \in \mathbb{R}\}$
- Soit on donne la forme des solutions : $t \mapsto C\mathrm{e}^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto at\mathrm{e}^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + a\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_2)$$

Commentaire

Question souvent mal rédigée. Il faut donner un nom à la fonction : « soit $f : t \mapsto at\mathrm{e}^{2t}$ » et ensuite on montre en calculant $f'(t)$ que $f'(t) = 2f(t) + a\mathrm{e}^{2t}$. Il faut rester très simple ici.

c) Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + bt\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

Commentaire

Question décevante, la méthode de variation de la constante n'est maitrisée que dans de très rares cas.

6. On fixe Y une solution de (S_T).

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3(t) = y_3(0)\mathrm{e}^{2t}$.

Commentaire

Après avoir montré que $y_3(t) = C\mathrm{e}^{2t}$, il faut **démontrer** que $C = y_3(0)$. Ceci n'a pas du tout été compris. On ne peut pas **choisir de poser** $C = y_3(0)$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$.

Commentaire

Dans cette question et la suivante, il faut bien gérer de quelle fonction on parle, de quelle équation différentielle elle est solution et comment on montre que la constante arrivant de la résolution a une expression simple comme « valeur en 0 ».

c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $y_1(t)$ similaire aux expressions précédentes.

7. On fixe X une solution de (S_A).

a) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) & = (\lambda_2 + \lambda_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) & = \left((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \\ x_3(t) & = \left((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

Commentaire

Une question assez similaire à l'exo traité en classe pour illustrer le cas non diagonalisable, inspiré du sujet 0 Ecricome. Ce genre de questions a de grandes chances de tomber aux écrits. L'idée générale de l'exo est de résoudre le système d'inconnue Y puis de se ramener à X via la matrice P.

b) Montrer que si la trajectoire associée à X est convergente, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Interpréter.

Commentaire

Une question plus originale dans sa forme. Ce n'est pas une méthode du cours donc il ne faut pas apprendre par coeur le corrigé. A réserver aux élèves les plus aguerris.

Exercice 4

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Commentaire

Répétons le une fois de plus. Puisque la question est de reconnaître une loi usuelle, il faut décrire l'expérience comme une expérience de référence en parlant d'épreuves de Bernoulli (la formulation doit être connue par coeur). Ensuite on décrit la variable aléatoire. Enfin, on peut conclure que la variable aléatoire suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$. Il est tout simplement scandaleux de ne trouver une rédaction correcte que chez trois élèves alors qu'on l'a fait 20 fois en classe, qu'il s'agit d'une des méthodes les plus importantes du cours sur les var discrètes et qu'elle permet de se lancer dans beaucoup d'exos de concours.

b) Expliciter $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.

Commentaire

Beaucoup d'élèves se trompent de méthode dans cette question en voulant « bien faire ». Il est vrai qu'en général on doit décrire l'événement en termes d'événements élémentaires avant de calculer sa probabilité. Mais ici la situation est bien différente de beaucoup d'exos : on **connaît** la loi de X_n. Ainsi, il suffit d'appliquer la formule du cours.

c) Justifier : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] \;=\; [X_n = n]$.

Commentaire

Beaucoup d'erreurs de logique dans cette question. Il s'agit de démontrer une égalité entre deux événements, *i.e.* entre deux ensembles. Il faut donc impérativement raisonner par équivalence (éventuellement par double implication si c'est difficile). Tous les raisonnements à base de « donc » sont donc à proscrire ici si on oublie de faire la réciproque.

d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.

Commentaire

Cette question a donné lieu à beaucoup d'erreurs du type « si l'urne n'est pas vide, alors elle contient n jetons ». Il y a eu une surcomplication de la situation dans beaucoup de copies. Il fallait rester très simple : V_n est réalisé ssi au moins une urne est vide *i.e.* ssi l'urne 1 est vide **ou** l'urne 2 est vide **ou** l'urne 3 est vide.
Il faut bien se souvenir qu'en mathématiques, le **ou** est non exclusif. Ainsi, l'écriture précédente n'exclue pas les cas où deux urnes sont vides.

e) En déduire que : $\mathbb{P}(V_n) \; = \; 3 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Commentaire

Lorsqu'on doit calculer la probabilité d'une union d'événements, il faut se demander si les événements sont incompatibles. Ce n'était pas le cas ici. On devait donc penser à la formule du crible.

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $\mathbb{P}(V) = 0$.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

a) On rappelle qu'en **Python** la commande `rd.randint(a,b)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a, b-1]\!]$.
Compléter la fonction **Python** ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
import numpy.random as rd
def SimuT():
    X,Y,Z,n = 0,0,0,0
    liste = [X, Y, Z]
    while ....................
        i = rd.randint(0,3) # choix d'un entier entre 0 et 2
        liste[i] = ....................
        n = n+1
    return ....................
```

b) Écrire un script **Python** qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

Commentaire

Une très banale utilisation de la loi faible des grands nombres. Un seul élève qui prend 1 point sur cette question alors que je vous avait demandé de travailler le TP correspondant la semaine avant le DS, c'est désolant. J'espère que le travail sera fait pour les écrits car passer à côté de ces points, c'est vraiment laisser une longueur d'avance gratuitement à ses concurrent·es qui auront fait l'effort d'apprendre par coeur un petit programme de 6 lignes.

4. Déterminer $T(\Omega)$.

Commentaire

Cette question a donné lieu a beaucoup de non-sens. Il faut se poser la question avant d'encadrer le résultat de sa pertinence. Rappelons la définition de T : « Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton ». Comment est-il possible que $T(\Omega)$ dépende de n alors que la définition de T ne fait apparaître aucun n et que cette lettre désignait auparavant un « nombre de jetons répartis » ? Il est clair ici que l'on ne connaît pas à l'avance le nombre de jetons répartis, c'est précisément l'objet de la variable T.
Attention également à ne pas confondre les intervalles d'entiers et les intervalles de réels : $[\![3, +\infty[\![\neq [3, +\infty[$.

5. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([T = n]\big) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n)$.

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Commentaire

Un calcul pas évident mais assez classique, déjà croisé dans des DS précédents.

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. ***a)*** Donner la loi du couple (X_2, W_2).

Commentaire

Puisque les deux variables aléatoires sont finies et ont peu de valeurs possibles, il fallait ici séparer tous les cas à la main plutôt que d'essayer de trouver une formule générale (beaucoup trop difficile et pas vraiment pertinent).

b) En déduire la loi de W_2, et calculer son espérance.

c) Calculer la covariance de X_2 et W_2.

d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

8. Déterminer $W_n(\Omega)$.

9. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

a) Démontrer : $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

c) Exprimer alors $\mathbb{E}(W_n)$ en fonction de n.

10. Démontrer : $\mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 2]\Big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 2]\Big)$?

11. Démontrer : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\Big) = \dfrac{2\dbinom{n}{k}}{3^n}$.

Que vaut $\mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 1]\Big)$?

12. Démontrer :

$$\mathbb{E}(X_n W_n) \ = \ 2\, n\, \mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 2]\Big) + \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\Big)$$

13. Démontrer alors : $\mathbb{E}(X_n W_n) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Puis calculer la covariance de X_n et W_n.

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.