DS6 correction (Maths I - version A)

Exercice 1 (EDHEC 2017)

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\ (x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

La fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.

□

2. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Démonstration.
La fonction f étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Tout d'abord :
$$\partial_1(f)(x, y) = 4x^3 - 4\ (x - y) = 4x^3 - 4x + 4y$$
- D'autre part :
$$\partial_2(f)(x, y) = 4y^3 - 4\ (x - y)\ (-1) = 4y^3 + 4x - 4y$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1(f)(x, y) = 4\ (x^3 - x + y)$ et $\partial_2(f)(x, y) = 4\ (y^3 + x - y)$.

□

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} \nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x, y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x, y) & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 4\ (x^3 - x + y) & = & 0 \\ 4\ (y^3 + x - y) & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\boxed{\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.}$$

□

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Par définition d'un point critique :

$$\begin{array}{c}(x,y) \text{ est un point}\\ \text{critique de } f\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{c}(x,y) \text{ est un point}\\ \text{critique de } f\end{array} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 + x - y &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 &=& -x^3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 &=& (-x)^3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right.$$

(car la fonction $t \mapsto t^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$)

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - 2x &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x\ (x^2 - 2) &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x\ (x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2}) &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \ \texttt{OU} \ x = \sqrt{2} \ \texttt{OU} \ x = -\sqrt{2} \\ y = -x \end{array}\right.$$

$$\iff (x,y) \in \big\{(0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\big\}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède trois points critiques : } (0,0),\ (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2},\sqrt{2}).}$$

Commentaire

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Il est par exemple assez fréquent de faire apparaître une équation du type :
$$\varphi(x) = \varphi(y)$$
où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. En réalité, c'est le caractère injectif (φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ par exemple) qui nous intéresse ici puisqu'il permet de conclure :
$$x = y$$
En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
- Enfin, vérifier que $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des points critiques ne démontre pas que ce sont les seuls et ne constitue donc pas une réponse à la question.

□

3. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord :
$$\partial^2_{11}(f)(x, y) = 4\ (3x^2 - 1)$$
- Ensuite :
$$\partial^2_{12}(f)(x, y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x, y)$$
La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Enfin :
$$\partial^2_{22}(f)(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ \partial^2_{11}(f)(x, y) = 4\ (3x^2 - 1),\ \ \partial^2_{12}(f)(x, y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x, y) \\ \text{et } \partial^2_{22}(f)(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)\end{array}}$$

Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial^2_{12}(f)(x, y)$ et $\partial^2_{21}(f)(x, y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

□

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

Démonstration.
On rappelle que la matrice hessienne de f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(x,y) & \partial^2_{12}(f)(x,y) \\ \partial^2_{21}(f)(x,y) & \partial^2_{22}(f)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\ (3x^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3y^2-1) \end{pmatrix}$$

- On en déduit :

$$\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (0)^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (0)^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$\nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$\nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)}$$

□

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est une valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\ I \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H - \lambda\ I) = 0 \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \det\Big(\nabla^2(f)(0,0) - \lambda\ I\Big) & = & \det\left(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (-4-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda-4)\ (4+\lambda+4) \ = \ \lambda\ (\lambda+8) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(0,0) \text{ admet pour valeurs propres } 0 \text{ et } -8.}$$

- Et :

$$\begin{array}{rcl} \det\Big(\nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - \lambda\ I\Big) & = & \det\left(\begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (20-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (20-\lambda-4)\ (20-\lambda+4) \ = \ (16-\lambda)\ (24-\lambda) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } \nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ admettent pour valeurs propres } 16 \text{ et } 24.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ces deux matrices admettent deux valeurs propres strictement positives.}\\ \text{On en déduit que } f \text{ admet un minimum local en } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et en } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).\end{array}}$$

Enfin :

$$\begin{array}{rcl} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) & = & (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2\ (\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2 \\ & = & 4 + 4 - 2\ (2\ \sqrt{2})^2 \\ & = & 8 - 2 \times 4 \times 2 \\ & = & 8 - 16 \ = \ -8 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ce minimum local a pour valeur } f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8 = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}).}$$

□

d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$f(x, x) = x^4 + x^4 - 2\ (x - x)^2 = 2\ x^4 \geqslant 0$$

- Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcl} f(x, -x) & = & x^4 + (-x)^4 - 2\ (x - (-x))^2 \\ & = & 2x^4 - 2\ (2\ x)^2 \\ & = & 2x^4 - 8x^2 \\ & = & 2x^2\ (x^2 - 4) = 2x^2\ (x - 2)\ (x + 2) \end{array}$$

  Comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $f(x, -x)$ est du signe de de $(x - 2)\ (x + 2)$.
  Ainsi, $f(x, -x) < 0$ si $x \in]-2, 2[\setminus\{0\}$, et $f(x, -x) \geqslant 0$ sinon.

- Enfin, $f(0, 0) = 0$.
  On déduit de ce qui précède que pour tout x au voisinage de 0 (exclu), on a :

$$f(x, -x) < f(0, 0) < f(x, x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut qu'au point } (0, 0)\text{, la fonction } f \text{ n'admet ni un minimum local, ni un}\\ \text{maximum local. Il n'y a pas d'extremum au point } (0, 0).\end{array}}$$

□

4. a) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{cl} & f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2 \\ = & f(x, y) - (x^4 - 4x^2 + 4) - (y^4 - 4y^2 + 4) - 2\ (x^2 + 2xy + y^2) \\ = & (\cancel{x^4} + \xcancel{y^4} - 2\ (x - y)^2) - \cancel{x^4} - \xcancel{y^4} + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = & -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = & -8 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2 = -8.}$$

Commentaire

- Il y avait une erreur dans le sujet initial. Il était en effet demandé de calculer :

$$f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2) - 2(x+y)^2$$

Le carré du terme $(y^2-2)^2$ n'était donc pas présent dans les énoncés distribués.

- Il est globalement rare que les sujets contiennent des erreurs. Malheureusement, malgré la relecture soignée des concepteurs, il peut arriver que certaines coquilles subsistent. Un candidat repérant une coquille peut le signaler sur sa copie. Attention cependant au faux positif : signaler qu'on a repéré une coquille alors qu'il n'y en a pas fait plutôt mauvais effet.
- Quand la coquille est avérée, la question sort généralement du barème.
- Ici, on pouvait se douter qu'il y avait un problème car, dans l'expression de f, x et y jouent des rôles symétriques ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$). La coquille introduisait une dissymétrie des rôles de x et y, ce qui pouvait mettre la puce à l'oreille.

☐

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & -8 + \Big((x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\Big) \\ & \geqslant & -8 \end{array}$$

car on ajoute à -8 une somme de carrés.

- On rappelle que $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \leqslant f(x,y)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet aux points } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ un minimum global.}}$$

☐

5. a) Compléter la deuxième ligne du programme suivant afin de définir la fonction f en **Python**.

```
def f(x,y):
    return ................
```

Démonstration.
Il suffit de recopier la définition de la fonction f.

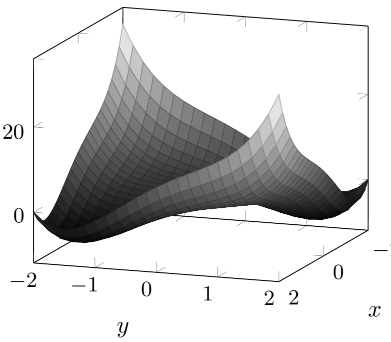
```
    return x**4 + y**4 - 2 * (x - y)**2
```

Commentaire

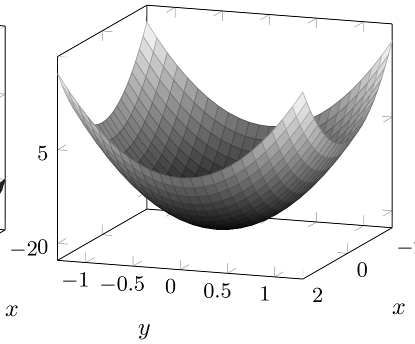
On rappelle qu'il n'est pas obligatoire de recopier tout le programme lorsqu'il est demandé de compléter un programme à trou.

☐

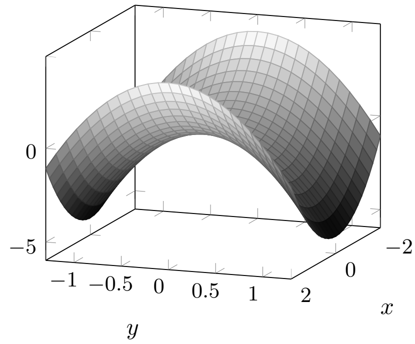
b) On utilise la fonction précédente pour tracer le graphe de f et **Python** renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Démonstration.

- D'après l'étude précédente, la fonction f possède un minimum global réalisé en les deux points $((\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$.
- On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.
- On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).
- Seule la première nappe représente une fonction admettant un minimum global réalisé en deux points. C'est donc la représentation de la fonction f considéré.

$$\boxed{\text{Le script précédent renvoie la première nappe.}}$$

Commentaire

Il était difficile de lire les coordonnées des deux points atteignant le minimum sur l'énoncé original. Pour être certain d'avoir des points (même si la photocopie en noir et blanc rend le graphique peut lisible), il est conseillé de lister les propriétés que doit avoir la nappe représentant f.

□

Exercice 2 (EDHEC 2013)

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\ dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto 1 - |x|$ est continue sur $]-1, 1[$ car la fonction valeur absolue l'est.
  De plus, la fonction f est aussi continue en 1 car :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} 1 - x \quad = \quad \underset{\displaystyle f(1)}{\overset{\displaystyle 0}{\shortparallel}} \quad = \quad \lim_{x \to 1} 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

  On démontre de même que la fonction est continue en -1.

$$\boxed{\text{La fonction est continue sur } [-1, 1]. \text{ Elle l'est donc aussi sur } [0, 1].}$$

- De plus :

$$\int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^1 (1 - t)\ dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}}$$

- Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $-x \in [-1, 1]$ et :

$$f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)$$

$$\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ est paire.}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-1}^0 f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}.}$$

Commentaire

La démonstration du résultat précédent s'effectue grâce à un changement de variable.
On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -1 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
On a donc :

$$\int_{-1}^0 f(t)\ dt = \int_1^0 f(-u)(-\ du) = \int_0^1 f(-u)\ du$$

Or, la fonction f est paire (d'après la question ***1.***), donc :

$$\int_{-1}^0 f(t)\ dt = \int_0^1 f(u)\ du = \frac{1}{2}$$

□

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue
  - × sur $]-1,1[$ en tant que somme de fonctions continues sur $]-1,1[$,
  - × sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ en tant que fonction constante.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sauf éventuellement en } -1 \text{ et } 1.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, alors : $f(x) = 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.
  - × si $x \in [-1,1]$, alors :

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant |x| \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \leqslant -|x| \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant 1-|x| \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  La fonction f est nulle en dehors de $[-1,1]$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt$$

  De plus, f est continue sur $[-1,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = \int_{-1}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{1} f(t)\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2. a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f(t)\, dt$.
- La fonction f est nulle en dehors de $[-1,1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t\, f(t)\, dt$$

  De plus, la fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue sur le segment $[-1,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\, f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance.}}$$

- Par parité de la fonction $t \mapsto f(t)$, on déduit, à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\int_0^1 t\, f(t)\, dt \;=\; \int_0^{-1} (-u)\, f(-u)(-du) \;=\; \int_0^{-1} u\, f(-u) du \;=\; \int_0^{-1} u\, f(u) du = -\int_{-1}^{0} u\, f(u) du$$

- Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^{1} t\; f(t)\; dt \;=\; \int_{-1}^{0} t\; f(t)\; dt + \int_0^1 t\; f(t)\; dt \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

Commentaire

On peut aussi effectuer un calcul direct de $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\, f(t)\; dt$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} t\, f(t)\; dt &= \int_{-1}^{0} t\, f(t)\; dt + \int_0^1 t\, f(t)\; dt \\
&= \int_{-1}^{0} t(1+t)\; dt + \int_0^1 t(1-t)\; dt \\
&= \int_{-1}^{0} (t+t^2)\; dt + \int_0^1 (t-t^2)\; dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_{0}^{1} \\
&= -\left(\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;=\; 0
\end{aligned}$$

□

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t)\; dt$.
- La fonction f est nulle en dehors de $[-1,1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\; dt = \int_{-1}^{1} t^2\, f(t)\; dt$$

De plus, la fonction $t \mapsto t^2\, f(t)$ est continue sur le segment $[-1,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\, f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une variance.}}$$

- Par parité de la fonction $t \mapsto f(t)$, on déduit, à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\int_0^1 t^2 \ f(t) \ dt \ = \ \int_0^{-1} (-u)^2 \ f(-u)(-du) \ = \ -\int_0^{-1} u^2 \ f(u)du = \int_{-1}^0 u^2 \ f(u)du$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 f(t) \ dt \ &= \ \int_0^1 t^2 f(t) \ dt \ = \ \int_0^1 t^2(1-t) \ dt \\ &= \ \int_0^1 (t^2 - t^3) \ dt \ = \ \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ = \ \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^1 t^2 \ f(t) \ dt = \int_{-1}^0 t^2 \ f(t) \ dt + \int_0^1 t^2 \ f(t) \ dt = 2 \int_0^1 t^2 \ f(t) \ dt = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}.}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{1}{6}}$$

□

3. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.

- Si $x < -1$. La fonction f est nulle sur $]-\infty, x]$, donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^x f(t) \ dt = 0$$

- Si $x \in [-1, 0]$.

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt} + \int_{-1}^{x} f(t)\ dt \\
&= \int_{-1}^{x} (1+t)\ dt \ = \ \left[\ t + \frac{t^2}{2}\ \right]_{-1}^{x} \\
&= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

- Si $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt} + \int_{-1}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} (1-t)\ dt \\ &= \frac{1}{2} + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

- Si $x > 1$. Comme f est une densité :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt} + \int_{-1}^{1} f(t)\ dt + \cancel{\int_{1}^{x} f(t)\ dt} = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

□

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4. ***a)*** Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.

Démonstration.

- Par définition : $Y = |X|$. Donc $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in]-\infty, 0[$. Alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0],\ F_Y(x) = 0}$$

□

b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) = F_X(x) - F_X(-x)$$

où la dernière égalité est obtenue car X est une v.a.r. à densité.

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x)}$$

□

c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.
D'après l'énoncé, Y est une v.a.r. à densité.
Pour déterminer une densité g, on dérive F_Y sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (qui sont bien des intervalles **ouverts**).

- Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$$g(x) = F_Y'(x) = 0$$

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$g(x) = F_Y'(x) = F_X'(x) - (-F_X'(-x)) = f(x) + f(-x)$$

  × Si $x \in]0, 1]$, alors $-x \in [-1, 0[$ et :

$$g(x) = f(x) + f(-x) = 1 - |x| + (1 - |-x|) = 1 - x + 1 - x = 2(1-x)$$

  × Si $x \in]1, +\infty[$, alors $-x \in]-\infty, -1[$ et :

$$f(x) = f(x) + f(-x) = 0 + 0 = 0$$

- On choisit la valeur arbitraire : $g(0) = 2$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient : } g : x \mapsto \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

□

d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m g(t)\, dt$.
- La fonction g est nulle en dehors de $[0, 1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\, dt = \int_0^1 t\, g(t)\, dt$$

  De plus, la fonction $t \mapsto t\, g(t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\, g(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ admet une espérance.}}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t\, g(t)\, dt &= 2 \int_0^1 t(1-t)\, dt \\ &= 2 \int_0^1 (t - t^2)\, dt \\ &= 2 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}.}$$

- La v.a.r. Y admet une variance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m g(t)\ dt$.
- La fonction g est nulle en dehors de $[0,1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g(t)\ dt = \int_0^1 t^2\, g(t)\ dt$$

De plus, la fonction $t \mapsto t^2\, g(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2\, g(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ admet une variance.}}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2\, g(t)\ dt &= 2\int_0^1 t^2(1-t)\ dt \\ &= 2\int_0^1 (t^2-t^3)\ dt \\ &= 2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 2\times\frac{1}{12} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{6}.}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}-\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{18}}$$

□

5. On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$.
On pose $I = \min(U,V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \min(U(\omega), V(\omega))$.
On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $\mathbb{P}([I > x]) = \mathbb{P}([U > x] \cap [V > x])$.
Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $U(\Omega) = [0,1]$ et $V(\Omega) = [0,1]$.
  Donc $I(\Omega) \subset [0,1]$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × Si $x < 0$, alors $[I \leqslant x] = \varnothing$, car $I(\Omega) \subset [0,1]$. Donc :

$$F_I(x) = \mathbb{P}([I \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Si $x \in [0,1]$. On rappelle l'égalité entre événements suivante :

$$[I > x] = [U > x] \cap [V > x]$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} F_I(x) &= \mathbb{P}([I \leqslant x]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([I > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([U > x] \cap [V > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([U > x])\, \mathbb{P}([V > x]) && \textit{(car les v.a.r. } U \textit{ et } V \textit{ sont indépendantes)} \\ &= 1 - \Big(1 - \mathbb{P}([U \leqslant x])\Big)\Big(1 - \mathbb{P}([V \leqslant x])\Big) \\ &= 1 - (1 - F_U(x))(1 - F_V(x)) \\ &= 1 - (1-x)(1-x) && \textit{(car } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]), \ V \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,1]\!]) \textit{ et } x \in [0,1]\textit{)} \\ &= 1 - (1-x)^2 \end{aligned}$$

× Si $x > 1$, alors $[I \leqslant x] = \Omega$, car $I(\Omega) \subset [0,1]$. Donc :

$$F_I(x) = \mathbb{P}([I \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient : } F_I : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

□

b) En déduire que I suit la même loi que Y.

Démonstration.

- Déterminons une densité de I.
  Pour cela, on dérive F_I sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ (qui sont bien des intervalles **ouverts**).
  × Soit $x \in]-\infty, 0[$.
  $$f_I(x) = F_I'(x) = 0$$
  × Soit $x \in]0,1[$.
  $$f_I(x) = F_I'(x) = 2(1-x)$$
  × Soit $x \in]1,+\infty[$.
  $$f_I(x) = F_I'(x) = 0$$
  × On choisit enfin les valeurs arbitraires : $f_I(0) = 2$ et $f_I(1) = 0$.
  $$\boxed{\text{On en déduit : } f_I : x \mapsto \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$
- On remarque alors qu'**une** densité de I (f_I) est égale à **une** densité de Y (g).
  Donc les v.a.r. I et Y ont même fonction de répartition.
  Or la fonction de répartition caractérise la loi.
  $$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } I \text{ et } Y \text{ ont même loi.}}$$

□

6. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \geqslant 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Démonstration.

- Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0, 1]$, on obtient : $I_n(\Omega) \subset [0, 1]$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent
  - × Si $x < 0$, alors $[I_n \leqslant x] = \varnothing$ car $I_n \subset [0, 1]$. Donc :

$$F_{I_n}(x) = \mathbb{P}([I_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - × Si $x \in [0, 1]$. On rappelle l'égalité entre événements suivante :

$$[I_n > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll}
F_{I_n}(x) & = & \mathbb{P}([I_n \leqslant x]) \; = \; 1 - \mathbb{P}([I_n > x]) & \\
& = & 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i > x]\right) & \\
& = & 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i > x]) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 > x]) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & 1 - \Big(\mathbb{P}([X_1 > x])\Big)^n & \\
& = & 1 - \Big(1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant x])\Big)^n & \\
& = & 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n & \\
& = & 1 - (1 - x)^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \textit{ et } x \in [0, 1]\textit{)}
\end{array}$$

× Si $x > 1$, alors $[I_n \leqslant x] = \Omega$ car $I_n \subset [0,1]$. Donc :

$$F_{I_n}(x) = \mathbb{P}([I_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } F_{I_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

- Pour conclure quant à la convergence en loi de (I_n), on détermine la limite la suite $(F_{I_n}(x))_{n\geqslant 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

  × Soit $x < 0$. Alors, par définition de (F_{I_n}) :

  $$\lim_{n\to+\infty} F_{I_n}(x) = 0$$

  × Si $x = 0$. Alors, par définition de (F_{I_n}) :

  $$\lim_{n\to+\infty} F_{I_n}(x) = 1$$

  × Soit $x \in]0,1]$. Par définition de (F_{I_n}) :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ F_{I_n}(x) = 1-(1-x)^n$$

  Or :

  $$0 < x \leqslant 1 \ \Leftrightarrow \ 0 \leqslant 1-x < 1$$

  Donc $|1-x| < 1$.
  D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{I_n}(x) = 1-0 = 1$.

  × Soit $x > 1$. Alors, par définition de (F_{I_n}) :

  $$\lim_{n\to+\infty} F_{I_n}(x) = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}, \ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{I_n}(x) = F(x), \\ \text{où } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}\end{array}}$$

- On note alors Z une v.a.r. constante égale à 0 et G sa fonction de répartition. Alors :

  $$G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

  On remarque :

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n\to+\infty} F_{I_n}(x) = G(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (I_n) \text{ converge en loi vers } Z \text{, une v.a.r. constante égale à } 0.}$$

Commentaire

Il suffit de montrer la convergence de $(F_{I_n}(x))$ vers $G(x)$ sur l'ensemble des points où la fonction G est continue.
Ici, il suffisait donc de montrer cette convergence pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

□

7. Simulation informatique de la loi de Y.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
def SimuY():
    U = ......
    V = ......
    if U < V:
        return ......
    else:
        return ......
```

Démonstration.
On sait que les v.a.r. Y et I ont même loi.
Donc, pour simuler la loi de Y, on simule la loi de $I = \min(U, V)$. On obtient alors :

```
def SimuY():
    U = rd.random()
    V = rd.random()
    if U < V:
        return U
    else:
        return V
```

$\square$

Exercice 3 (sujet maison)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}. On pose $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration. On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftrightarrow L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\left.\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi la matrice P est inversible.
On effectue l'opération $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\left.\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\left.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

Ensuite,

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}\\ & & \shortparallel\\ & & T \end{array}$$

□

2. Expliciter $\mathrm{Sp}(T)$. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Démonstration. La matrice T est triangulaire supérieure donc ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres. D'où

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T) = \{2\}}$$

De plus, la matrice A est semblable à la matrice T d'après la question précédente, donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(T) = \{2\}}$$

Supposons que la matrice A soit diagonalisable. Alors il existe :

- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible
- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A

telles que $A = PDP^{-1}$.
Or, 2 est l'unique valeur propre de A donc $D = 2I$. D'où

$$\begin{aligned} A &= P(2I)P^{-1} \\ &= 2PP^{-1} \\ &= 2I \end{aligned}$$

C'est absurde car $A \neq 2I$. Donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

□

On considère maintenant les systèmes différentiels linéaires suivants :

$$(S_A) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) & + & x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & & \\ x_3'(t) & = & & & x_2(t) & + & x_3(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_T) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & + & y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & & 2y_2(t) & + & y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

3. Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2(t) + x_3(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) & + & x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & & \\ x_3'(t) & = & & & x_2(t) & + & x_3(t) \end{array} \right. \\ &\iff X \text{ est solution de } (S_A) \end{aligned}$$

□

4. Soit $Y = P^{-1}X$. On note alors, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si Y est solution de (S_T).

Démonstration.

$$\begin{aligned} X \text{ est solution de } (S_A) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, (PY)'(t) = (PTP^{-1})(PY)(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, PY'(t) = PTY(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = TY(t) \\ &\iff Y \text{ est solution de } (S_T) \end{aligned}$$

□

5. ***a)*** Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

Démonstration. $(\mathscr{E}_1)$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. D'après le cours, les solutions sont de la forme

$$\boxed{\varphi : t \mapsto c\mathrm{e}^{2t}, \qquad c \in \mathbb{R}}$$

□

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto at\mathrm{e}^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + a\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_2)$$

Démonstration. Notons $f : t \mapsto at\mathrm{e}^{2t}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= a\left(\mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{2t}\right) \\ &= a\mathrm{e}^{2t} + 2at\mathrm{e}^{2t} \\ &= 2f(t) + a\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

donc f est une solution de $(\mathscr{E}_2)$. □

c) Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + bt\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

Démonstration. Cherchons une solution particulière sous la forme $f : t \mapsto C(t)\mathrm{e}^{2t}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= C'(t)\mathrm{e}^{2t} + 2C(t)\mathrm{e}^{2t} \\ &= C'(t)\mathrm{e}^{2t} + 2f(t) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\mathscr{E}_3) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 2f(t) + bt\mathrm{e}^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) - 2f(t) = bt\mathrm{e}^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ C'(t)\mathrm{e}^{2t} = bt\mathrm{e}^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = bt \\ &\iff C \text{ est une primitive de } t \mapsto bt \end{aligned}$$

On pose alors $C : t \mapsto \frac{1}{2}bt^2$, ce qui donne $\boxed{f : t \mapsto \frac{1}{2}bt^2\mathrm{e}^{2t}}$. □

6. On fixe Y une solution de (S_T).

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3(t) = y_3(0)\mathrm{e}^{2t}$.

Démonstration. Y est solution de (S_T) donc y_3 est solution de $(\mathscr{E}_1)$. D'après la question 5a, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_3(t) = c\mathrm{e}^{2t}$$

Pour $t = 0$, on obtient : $y_3(0) = c\mathrm{e}^0 = c$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ y_3(t) = y_3(0)\mathrm{e}^{2t}.}$$

□

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$.

Démonstration. Y est solution de (S_T) donc y_2 est solution de l'équation différentielle avec second membre $\varphi'(t) = 2\varphi(t) + y_3(t)$. D'après la question précédente, cette équation différentielle se réécrit

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + y_3(0)\mathrm{e}^{2t}$$

On reconnaît l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$ avec $a = y_3(0)$. Ainsi, d'après la question 5b, la fonction $f : t \mapsto y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$ est une solution particulière. On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_2(t) = c\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$$

Pour $t = 0$, on obtient : $y_2(0) = c$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ y_2(t) = y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}.}$$

□

c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $y_1(t)$ similaire aux expressions précédentes.

Démonstration. Y est solution de (S_T) donc y_1 est solution de l'équation différentielle avec second membre $\varphi'(t) = 2\varphi(t) + y_2(t)$. D'après la question précédente, cette équation différentielle se réécrit

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$$

On reconnaît les seconds membres des équations différentielles $(\mathscr{E}_2)$ et $(\mathscr{E}_3)$ avec $a = y_2(0)$ et $b = y_3(0)$. Ainsi, d'après la question 5b, la question 5c et le principe de superposition, la fonction $f : t \mapsto y_2(0)t\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}y_3(0)t^2\mathrm{e}^{2t}$ est une solution particulière. On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_1(t) = c\mathrm{e}^{2t} + y_2(0)t\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}y_3(0)t^2\mathrm{e}^{2t}$$

Pour $t = 0$, on obtient : $y_1(0) = c$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ y_1(t) = y_1(0)\mathrm{e}^{2t} + y_2(0)t\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{1}{2}y_3(0)t^2\mathrm{e}^{2t}.}$$

□

7. On fixe X une solution de (S_A).

a) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} x_1(t) & = (\lambda_2 + \lambda_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) & = \left((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \\ x_3(t) & = \left((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

Démonstration. X une solution de (S_A) donc Y est solution de (S_T). D'après la question 6, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(0)\mathrm{e}^{2t} + y_2(0)t\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}y_3(0)t^2\mathrm{e}^{2t} \\ y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t} \\ y_3(0)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} y_1(0) + y_2(0)t + \frac{1}{2}y_3(0)t^2 \\ y_2(0) + y_3(0)t \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}
X(t) &= PY(t) \\
&= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) + y_2(0)t + \frac{1}{2} y_3(0)t^2 \\ y_2(0) + y_3(0)t \\ y_3(0) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} y_2(0) + y_3(0)t \\ y_1(0) + y_2(0)t + \frac{1}{2} y_3(0)t^2 + y_3(0) \\ y_1(0) + y_2(0)t + \frac{1}{2} y_3(0)t^2 - (y_2(0) + y_3(0)t) + 2y_3(0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (y_2(0) + y_3(0)t)\mathrm{e}^{2t} \\ ((y_1(0) + y_3(0)) + y_2(0)t + \frac{1}{2} y_3(0)t^2)\mathrm{e}^{2t} \\ ((y_1(0) - y_2(0) + 2y_3(0)) + (y_2(0) - y_3(0))t + \frac{1}{2} y_3(0)t^2)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On pose $\lambda_1 = y_1(0)$, $\lambda_2 = y_2(0)$ et $\lambda_3 = y_3(0)$. On a alors bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) &= (\lambda_2 + \lambda_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) &= \left((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right) \mathrm{e}^{2t} \\ x_3(t) &= \left((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right) \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

□

b) Montrer que si la trajectoire associée à X est convergente, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Interpréter.

Démonstration. Supposons que la trajectoire associée à X soit convergente. Alors, il existe $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = \ell_1, \qquad \lim_{t \to +\infty} x_2(t) = \ell_2, \qquad \lim_{t \to +\infty} x_3(t) = \ell_3$$

Supposons que $\lambda_3 \neq 0$, alors $\lambda_2 + \lambda_3 t \underset{t \to +\infty}{\sim} \lambda_3 t$ et donc $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \lambda_3 t \mathrm{e}^{2t}$. On en déduit que

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = \pm\infty \qquad \text{(selon le signe de } \lambda_3\text{)}$$

Ceci contredit le fait que $\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = \ell_1$, donc $\lambda_3 = 0$.
Supposons ensuite que $\lambda_2 \neq 0$. Alors $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \lambda_2 \mathrm{e}^{2t}$. On en déduit que

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = \pm\infty \qquad \text{(selon le signe de } \lambda_2\text{)}$$

Ceci contredit le fait que $\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = \ell_1$, donc $\lambda_2 = 0$.
Finalement, supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Alors $x_2(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \lambda_1 \mathrm{e}^{2t}$. On en déduit que

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = \pm\infty \qquad \text{(selon le signe de } \lambda_1\text{)}$$

Ceci contredit le fait que $\lim\limits_{t \to +\infty} x_2(t) = \ell_2$, donc $\lambda_1 = 0$.

Commentaire

On aurait aussi pu raisonner de la manière suivante (plus efficace mais peut-être moins intuitive) :
$\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = \ell_1$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{x_1(t)}{\mathrm{e}^{2t}} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda_2 + \lambda_3 t = 0$ donc $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$
puis $\lim\limits_{t \to +\infty} x_2(t) = \ell_2$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{x_2(t)}{\mathrm{e}^{2t}} = 0$, or $\dfrac{x_2(t)}{\mathrm{e}^{2t}} = \lambda_1$ donc $\lambda_1 = 0$.

On vient de démontrer que si X est convergente, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = 0$$

et donc X est la solution identiquement nulle. Autrement dit, le système différentiel linéaire (S_A) possède une unique trajectoire convergente : le point d'équilibre $(0, 0, 0)$. Toutes les autres trajectoires du système sont divergentes. L'unique point d'équilibre du système est donc instable.

□

Exercice 4 (ECRICOME 2022)

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Démonstration.
Commençons tout d'abord par la v.a.r. X_n.

- L'expérience aléatoire consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{1}{3}$ (probabilité que le pion soit placé dans l'urne 1).
- La v.a.r. X_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X_n \text{ suit la loi } \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right).}$$

$$\boxed{\text{Par les mêmes arguments, on conclut : } Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right) \text{ et } Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right).}$$

□

b) Expliciter $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) &= \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-0} \\ &= 1 \times 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

- En exploitant de nouveau la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_n = n]\big) &= \binom{n}{n} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-n} \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

□

c) Justifier : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.

Démonstration.

L'événement $[X_n = n]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Après la répartition de n jetons, n jetons ont été placés dans l'urne 1

$\Leftrightarrow$ Après la répartition de n jetons, aucun jeton n'a été placé dans l'urne 2
`ET` aucun jeton n'a été placé dans l'urne 3

$\Leftrightarrow$ L'événement $[Y_n = 0]$ est réalisé
`ET` l'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé

$$\boxed{\text{On en conclut : } [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n].}$$

□

d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.

Démonstration.

L'événement V_n est réalisé

$\Leftrightarrow$ Après la répartition de n jetons, au moins une urne est restée vide

$\Leftrightarrow$ Après la répartition de n jetons, l'urne 1 est restée vide
`OU` l'urne 2 est restée vide
`OU` l'urne 3 est restée vide

$\Leftrightarrow$ Après la répartition de n jetons, l'urne 1 contient 0 jeton
`OU` l'urne 2 contient 0 jeton
`OU` l'urne 3 contient 0 jeton

$\Leftrightarrow$ L'événement $[X_n = 0]$ est réalisé
`OU` l'événement $[Y_n = 0]$ est réalisé
`OU` l'événement $[Z_n = 0]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $[X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$ est réalisé

$$\boxed{V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]}$$

Commentaire

- En question ***1.c)***, le résultat à démontrer est fourni directement dans l'énoncé. Cela rend la question moins intéressante : au lieu de demander au candidat de trouver le lien entre les événements $[Y_n = 0]$, $[Z_n = 0]$ et $[X_n = n]$, on demande simplement au candidat d'énoncer en français un résultat mathématique. L'objectif de cette question semble donc simplement de vérifier cette bonne compréhension.
- En question ***1.d)***, le concepteur ne fournit plus l'égalité entre événements et c'est alors au candidat de la déterminer. Cela permet d'avoir une succession de questions de difficulté progressive, ce qui est bienvenu aux concours.

Commentaire

- L'une des difficultés du travail de concepteur est de réfléchir en découpage en sous-questions car celui-ci influe directement sur la difficulté du sujet. Par ailleurs, il faut aussi mener une réflexion assez précise sur le fait de fournir ou non les résultats intermédiaires :
  - × fournir un résultat rend parfois la question concernée un peu vide.
  - × ne pas fournir le résultat peut rendre une question ultérieure inabordable pour un candidat qui n'aurait pas su le trouver.

  Il y a donc un équilibre à trouver afin que l'énoncé reste d'un niveau suffisamment élevé tout en évitant la multiplication de questions bloquantes. La formulation du sujet démontre que le concepteur a mené une réflexion poussée sur cet équilibre.

$\square$

e) En déduire : $\mathbb{P}(V_n) \;=\; 3\,\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3\,\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n) &= \mathbb{P}\big([X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]\big)\\ &= \quad \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) + \mathbb{P}\big([Y_n = 0]\big) + \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)\\ &\quad - \mathbb{P}\big([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]\big) - \mathbb{P}\big([X_n = 0] \cap [Z_n = 0]\big) - \mathbb{P}\big([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]\big)\\ &\quad + \mathbb{P}\big([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]\big)\end{aligned}$$

- Détaillons les différents éléments de cette égalité.
  - × Comme les v.a.r. X_n, Y_n et Z_n suivent toutes la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$, on obtient ($cf$ question ***1.b)***) :

$$\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([Y_n = 0]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \;=\; \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$$

× On a : $[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = \varnothing$. En effet :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } [X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{L'événement } [X_n = 0] \text{ est réalisé} \\ \texttt{ET} & \text{l'événement } [Y_n = 0] \text{ est réalisé} \\ \texttt{ET} & \text{l'événement } [Z_n = 0] \text{ est réalisé} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{Après la répartition de } n \text{ jetons, aucun n'a été placé dans l'urne 1,} \\ \texttt{ET} & \text{aucun n'a été placé dans l'urne 2} \\ \texttt{ET} & \text{aucun n'a été placé dans l'urne 3} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \text{Après la répartition de } n \text{ jetons, les trois urnes sont vides} \end{array}$$

Cette dernière propriété n'étant jamais vérifiée, il en est de même de la première. L'événement $[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ ne peut être réalisé. C'est donc l'événement impossible. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]\,\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Enfin, d'après la question ***1.c)*** : $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] \ = \ [X_n = n]$.
En raisonnant de même :

$$[X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \ = \ [Z_n = n] \qquad \text{et} \qquad [X_n = 0] \cap [Z_n = 0] \ = \ [Y_n = n]$$

Ces égalités expriment simplement le fait que si, après le placement de n jetons une urne est pleine, alors les deux autres sont vides (et réciproquement).

Comme les v.a.r. X_n, Y_n et Z_n suivent toutes la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$, on obtient (*cf* question ***1.b)***) :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_n = n]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[Y_n = n]\,\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[Z_n = n]\,\big) \ = \ \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

- Finalement, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(V_n) & = & \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \\ & - & \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ & + & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(V_n) \ = \ 3 \ \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \ \left(\frac{1}{3}\right)^n.}$$

□

2. On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $\mathbb{P}(V) = 0$.

Démonstration.

- Remarquons :

$$\begin{array}{rl} & \text{L'événement } V \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{L'une des urnes reste éternellement vide} \\ \Leftrightarrow & \text{Quel que soit le nombre } k \in \mathbb{N}^* \text{ de jetons répartis, une urne est vide} \\ \Leftrightarrow & \forall k \in \mathbb{N}^*,\ V_k \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \qquad \text{Après la répartition du premier jeton, une urne est restée vide} \\ & \texttt{ET} \quad \text{après la répartition de 2 jetons, une urne est restée vide} \\ & \texttt{ET} \quad \text{après la répartition de 3 jetons, une urne est restée vide} \\ & \dots \quad \dots \\ & \texttt{ET} \quad \text{après la répartition de } k \text{ jetons, une urne est restée vide} \\ & \dots \quad \dots \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} V_k \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } V = \bigcap_{k=1}^{+\infty} V_k.}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} V_k\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) && \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$V_k \supset V_{k+1}$$

En effet, si V_{k+1} est réalisé, c'est que, après la répartition de $k+1$ jetons, une urne est restée vide. Si c'est le cas, l'urne en question était déjà vide avant la répartition du $(k+1)^{\text{ème}}$ jeton : comme on ne retire jamais de jeton d'une urne, une urne vide à une étape de l'expérience l'était déjà lors de l'étape précédente. On en conclut :

$$\bigcap_{k=1}^{n} V_k = V_n \qquad \textit{(la suite } (V_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \textit{ est une suite décroissante d'événements)}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(3\,\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\,\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(3\,\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \lim_{n\to+\infty} \left(3\,\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) && \textit{(car ces deux quantités qui admettent une limite finie)} \\ &= 0 - 0 && \textit{(car } \tfrac{2}{3} \in]-1,1[\textit{ et } \tfrac{1}{3} \in]-1,1[\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(V) = 0}$$

Commentaire

- Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

1) Introduire des événements simples (« tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage », « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ...) liés à l'expérience considérée.
Nommer l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

2) Décomposer l'événement A à l'aide d'événements simples.

3) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Commentaire

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :

  × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.

  × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le corollaire du théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant l'événements contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.

  × si c'est le cas, on utilise la formule associée.

  × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule des probabilités composées.

- Dans un exercice de probabilités discrètes, il est assez fréquent de considérer des expériences qui font intervenir un nombre infini d'étapes. Dès lors, il est assez naturel de s'interroger sur la probabilité qu'une propriété puisse se réaliser une infinité (successive) de fois ou qu'une propriété soit réalisé au moins une fois au cours de l'expérience. Cela revient à considérer des événements qui s'écrivent à l'aide d'une union et / ou d'une intersection infinie d'événements. Pour déterminer la probabilité de tels événements, la méthode usuelle consiste à utiliser le théorème de la limite monotone. Il stipule, si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

  Il est à noter qu'aucune hypothèse n'est faite sur la suite (A_k) d'événements. Elle peut être une suite croissante ou décroissante d'événements ou n'être ni décroissante, ni croissante. Cette question de la monotonie de la suite ne se pose pas lors de l'utilisation du théorème de la limite monotone. Elle n'apparaît que dans l'étape suivante où l'on cherche à déterminer la probabilité d'une intersection / union **finie** d'événements.

- On a vu dans le point précédent que certaines propriétés s'expriment naturellement à l'aide d'une union / intersection infinie d'événements. En conséquence, l'utilisation du théorème de la limite monotone est assez fréquente aux concours. Lors de la session `2021`, les sujets `ECRICOME`, `EDHEC`, `ESSEC-I`, `ESSEC-II` contenaient tous une question qui nécessitait l'utilisation de ce théorème.

□

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

a) On rappelle qu'en **Python** la commande `rd.randint(a,b)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a, b-1]\!]$.

Compléter la fonction **Python** ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
import numpy.random as rd
def SimuT():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
    liste = [X, Y, Z]
    while ....................
        i = rd.randint(0,3) # choix d'un entier entre 0 et 2
        liste[i] = ....................
        n = n+1
    return ....................
```

Démonstration.

- **Début du programme**
  Au début du programme, on initialise à 0 les variables informatiques `X`, `Y` et `Z`. Ces variables sont faites pour déterminer le nombre respectif de jetons dans l'urne 1, 2 et 3, à chaque étape de l'expérience. Initialement, il n'y a aucun jeton dans les urnes.

```
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
```

  Par ailleurs, on initialise aussi à 0 la variable informatique `n` qui détermine le nombre total de jetons placés dans les urnes à chaque étape de l'expérience.

```
    n = 0
```

  Les 3 variables informatiques `X`, `Y` et `Z`, sont regroupées au sein d'une même matrice ligne.

```
    liste = [X, Y, Z]
```

- **Structure itérative**
  Il est explicitement demandé de stopper l'expérience lorsque, pour la première fois, chaque urne contient au moins un jeton. On rappelle que le nombre de jetons de chaque urne est stockée dans la matrice ligne `liste`. Il faut donc continuer l'expérience tant que l'un des coefficients de cette matrice est nul.

```
    while liste[0] == 0 or liste[1] == 0 or liste[2] == 0
```

  À chaque étape de l'expérience, un nouveau jeton est placé dans l'urne. Cette urne est choisie aléatoirement parmi les 3 urnes considérées. Pour ce faire, on utilise la fonction `rd.randint`, de sorte à simuler une v.a.r. U qui suit la loi $\mathcal{U}([\![1, 3]\!])$.

```
        i = rd.randint(0,3)
```

Il reste alors à mettre à jour le nombre de jetons contenus dans l'urne choisie pour accueillir le nouveau jeton. Pour ce faire, on incrémente de 1 la variable iformatique associée.

```
10        liste[i] = liste[i] + 1
```

Enfin, on met à jour le nombre total de jetons qui ont été placés dans les urnes en incrémentant la variable `n` de 1.

```
11        n = n + 1
```

- **Fin de programme**
  En sortie de boucle, on sait que plus aucune urne n'est vide. Il faut alors renvoyer le nombre d'étapes de l'expérience qu'il a fallu pour que cela soit le cas. Or, `n` est le nombre total de jetons placés jusqu'alors. Il faut donc renvoyer `n`.

```
12    return n
```

Commentaire

- Lors de l'écriture d'un programme informatique, on se soumet généralement à quelques règles de bonne conduite :
  (1) utilisation de commentaires indiquant le but de chaque fonction,
  (2) réflexion autour du découpage en sous-fonctions pouvant être réutilisées,
  (3) utilisation de nom explicites pour les fonctions et les variables,
  (4) indentation du code (utilisation correcte d'espaces et sauts de lignes).

  Le but de ces règles est de produire un code lisible, intelligible et facilement modifiable à l'avenir. Ces règles sont globalement très bien respectées ici. Le commentaire dans le programme ainsi que l'introduction des variables informatiques `X`, `Y` et `Z` témoigne de cette volonté de produire du code intelligible. Plus précisément, on peut remarquer qu'il était possible de remplacer les lignes 2 à 6 par celles-ci :

```
2     liste = [0, 0, 0]
```

  Agir ainsi ne modifie en rien ce qui est calculé par le programme. Mais cela rend son analyse plus compliquée. La présentation choisie par le concepteur démontre, comme dit plus haut, sa volonté de se faire comprendre par le candidat.
- En revanche, le nom choisi pour la fonction, à savoir `T` semble peu pertinent. Il induit une confusion avec la variable informatique `t` qui contient la simulation de la v.a.r. T. Le nom `simulT` est bien plus adapté. C'était le nom choisi dans les énoncés précédents et il serait préférable qu'il soit de nouveau choisi dans les énoncés à venir.
- La condition de continuation de la boucle consiste à tester si l'une des urnes contient un nombre nul de jetons. Ce test aurait aussi pu se faire comme suit.

```
7     while liste[0] * liste[1] * liste[2] == 0
```

  En effet, si le produit `liste[0] * liste[1] * liste[2]` est nul, c'est que l'une (au moins) de ces variables est nulle.

□

b) Écrire un script **Python** qui simule 10 000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

Démonstration.

- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ (pour peu que cette espérance existe) est :
  - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 10000$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. T.
    Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(t_1, \dots, t_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(T_1, \dots, T_N)$ de la v.a.r. T.
    (les v.a.r. T_i sont indépendantes et de même loi que T)
  - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \ = \ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} t_k \ \simeq \ \mathbb{E}(T)$$

- Il s'agit alors d'implémenter cette idée en **Python**. La première étape est de créer une matrice ligne `tabT` destinée à contenir le N-uplet $(t_1, \dots, t_N)$.

```
N = 10 000
tabT = np.zeros(N)
```

  Il s'agit alors d'affecter à chaque t_i une simulation de la v.a.r. T.

```
for i in range(N):
    tabT[i] = SimuT()
```

  (on rappelle que `SimuT` *est une fonction qui simule la v.a.r. T)*

- Il reste alors à afficher la valeur moyenne de ce N-uplet :

```
print(np.mean(tabT))
```

Commentaire

- Comme mentionné précédemment, les explications sont données ici pour la bonne compréhension du lecteur mais fournir uniquement le programme démontre la bonne compréhension et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.
- On n'a pas opté ici pour une présentation sous forme de fonction car :
  - × tous les paramètres sont fixés dans l'énoncé ($N = 10000$).
  - × le terme script utilisé par le concepteur est plutôt adapté à la présentation choisie. Si le concepteur attendait une fonction, il aurait certainement précisé l'entête.

  En revanche, le terme « renvoie » est plutôt utilisé lorsque l'on parle de fonction. Il aurait peut-être été préférable, pour cette question, de parler d'affichage. La présentation sous forme de fonction permet, sans aucun doute, d'obtenir tous les points.

Commentaire

- Il convient de savoir comment écrire une fonction car le concepteur demande parfois explicitement de faire une fonction. La présentation correspondante est la suivante.

```
def approxEsp():
    N = 10000
    tabT = np.zeros(N)
    for k in range(N):
        tabT[k] = SimuT()
    return np.mean(tabT)
```

- On s'est servi ici de la fonction `mean` (fonction prédéfinie en **Python**) qui permet de calculer la moyenne arithmétique des coefficients d'une matrice. On aurait aussi pu écrire un programme permettant de calculer $\dfrac{1}{N} \sum\limits_{k=1}^{N} t_k$ à l'aide d'une structure itérative. Pour ce faire, il est conseillé de d'abord calculer la somme qui apparaît dans ce terme puis de diviser par N.

```
def approxEsp():
    N = 10000
    S = 0
    for k in range(N):
        S = S + SimuT()
    return S / N
```

□

4. Déterminer $T(\Omega)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T est à valeurs entières car elle prend pour valeur le nombre de jetons nécessaire. On en déduit : $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- On peut être plus précis. La v.a.r. T :
  - × ne peut pas prendre les valeurs 0, 1 ou 2 car il faut a minima 3 jetons pour que chacune des 3 urnes contiennent au moins 1 jeton.
  - × peut prendre la valeur 3. C'est par exemple le cas lorsque :
    - l'urne 1 reçoit le jeton 1,
    - l'urne 2 reçoit le jeton 2,
    - l'urne 3 reçoit finalement le jeton 3.
  - × ...
  - × peut prendre la valeur k. C'est par exemple le cas lorsque :
    - l'urne 1 reçoit le jeton 1,
    - l'urne 2 reçoit les jetons 2, 3, ..., $k-1$,
    - l'urne 3 reçoit finalement le jeton k.
  - × ...

$$\boxed{\text{Ainsi, } T \text{ peut prendre toute valeur entière plus grande que 3. Autrement dit : } T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![.}$$

□

5. Démontrer : $\forall n \in T(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([T=n]\big) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in T(\Omega)$. Démontrons : $[T=n] \cup V_n \ = \ V_{n-1}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= V_{n-1} \cap \Omega \\ &= V_{n-1} \cap \Big([T=n] \cup \overline{[T=n]}\Big) \\ &= \Big(V_{n-1} \cap [T=n]\Big) \cup \Big(V_{n-1} \cap \overline{[T=n]}\Big) \end{aligned}$$

- Or :
  - × $[T=n] \subset V_{n-1}$.

    En effet, si $[T=n]$ est réalisé, c'est qu'il a fallu n jetons pour que, la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton. Ainsi, le $n^{\text{ème}}$ jeton a été placé dans la seule urne qui, à l'étape $n-1$ est encore vide. On en déduit qu'après la répartition de $n-1$ jetons, une urne (au moins) était toujours vide.

    $\boxed{\text{On en conclut alors : } V_{n-1} \cap [T=n] \ = \ [T=n]}$

  - × $V_{n-1} \cap \overline{[T=n]} = V_n$.

    En effet :

    L'événement $V_{n-1} \cap \overline{[T=n]}$ est réalisé

    $\Leftrightarrow$ Après la répartition de $n-1$ jetons, une urne (au moins) est restée vide
    ET il a fallu strictement plus de n jetons pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton

    $\Leftrightarrow$ Après la répartition de $n-1$ jetons, une urne (au moins) est restée vide
    ET après le placement du $n^{\text{ème}}$ jeton, une urne (au moins) est restée vide

    $\Leftrightarrow$ L'événement V_{n-1} est réalisé
    ET l'événement V_n est réalisé

    $\Leftrightarrow$ L'événement $V_{n-1} \cap V_n$ est réalisé

    $\boxed{\text{Comme } V_n \subset V_{n-1} \text{ (}cf\text{ question } \textbf{\textit{2.}}\text{), on en conclut : } V_{n-1} \cap \overline{[T=n]} = V_{n-1} \cap V_n = V_n.}$

    $\boxed{\text{On a bien : } [T=n] \cup V_n \ = \ V_{n-1}.}$

- Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_{n-1}) &= \mathbb{P}\big([T=n] \cup V_n\big) \\ &= \mathbb{P}\big([T=n]\big) + \mathbb{P}\big(V_n\big) \qquad \textit{(car les événements } [T=n] \textit{ et } V_n \textit{ sont incompatibles)} \end{aligned}$$

En effet, il est impossible qu'il ait fallu exactement n jetons pour que chaque urne contienne au moins un jeton et que, dans le même temps, une urne soit restée vide après le placement du $n^{\text{ème}}$ jeton.

$$\boxed{\forall n \in T(\Omega),\ \mathbb{P}(V_{n-1}) = \mathbb{P}\big([T=n]\big) + \mathbb{P}\big(V_n\big)}$$

Commentaire

- L'égalité initiale entre probabilités fait apparaître une différence entre probabilités de certains événements. Une telle égalité est généralement la conséquence d'une égalité entre événements où apparaît une différence ensembliste d'événements. Plus précisément, on pourrait mettre ici en place le raisonnement suivant :

$$V_{n-1} \setminus V_n \ = \ [T=n] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\big(V_{n-1}\big) - \mathbb{P}\big(V_{n-1} \cap V_n\big) = \mathbb{P}\big(\,[T=n]\,\big)$$

Rappelons par ailleurs qu'une différence ensembliste peut s'écrire comme une intersection :

$$V_{n-1} \setminus V_n \ = \ V_{n-1} \cap \overline{V_n}$$

Il s'agit donc de démontrer : $V_{n-1} \cap \overline{V_n} \ = \ [T=n]$.
Cette égalité se démontre plutôt aisément.
En effet, si $V_{n-1} \cap \overline{V_n}$ est réalisé, c'est qu'après la répartitions de $n-1$ jetons, une urne (au moins) est restée vide et qu'après la répartitions de n jetons, aucune urne n'est vide.
Ceci est réalisé si et seulement si il a fallu exactement n jetons pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

- On a préféré ici réordonner les termes de l'égalité de sorte à faire apparaître une somme entre probabilités d'événements. Une telle égalité est issue d'une réunion d'événements (le plus souvent incompatibles ou à tout le moins d'intersection négligeable) ce qui permet d'éviter d'avoir à gérer une différence ensembliste. Ce qui amène ici au raisonnement suivant :

$$[T=n] \ \cup \ V_n \ = \ V_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\big(\,[T=n]\,\big) + \mathbb{P}\big(V_n\big) = \mathbb{P}\big(V_{n-1}\big)$$

De manière générale, il est souvent plus simple et donc préférable de raisonner sur une somme de probabilités (qui provient généralement de l'union de 2 événements) que sur une différence de probabilités (qui provient généralement de la différence ensembliste de 2 événements).

- La présentation de la résolution de cette question illustre le schéma général de résolution présentée dans la remarque de la question ***2***. Lors de cette démonstration, on redémontre la formule des probabilités totales. On aurait pu rédiger directement avec ce théorème. Détaillons cette rédaction.
La famille $\Big([T=n]\,,\overline{[T=n]}\Big)$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\left(V_{n-1}\right) \ = \ \mathbb{P}\Big(\,[T=n] \cap V_{n-1}\Big) + \mathbb{P}\left(\overline{[T=n]} \cap V_{n-1}\right)$$

On termine ensuite en remarquant, comme dans la présentation précédente :

$$[T=n] \cap V_{n-1} \ = \ [T=n] \qquad \text{et} \qquad \overline{[T=n]} \cap V_{n-1} \ = \ V_n$$

□

6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 3} k \ \mathbb{P}\big(\,[T=k]\,\big)$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car cette série est à termes positifs.

- Soit $N \in [\![3, +\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=3}^{N} k\ \mathbb{P}\big([T=k]\big) \\
= & \sum_{k=3}^{N} k\ \big(\mathbb{P}(V_{k-1}) - \mathbb{P}(V_k)\big) && \textit{(d'après la question précédente et car } k \in T(\Omega)\textit{)} \\
= & \sum_{k=3}^{N} \Big(k\ \mathbb{P}(V_{k-1}) - k\ \mathbb{P}(V_k)\Big) \\
= & \sum_{k=3}^{N} k\ \mathbb{P}(V_{k-1}) \ - \ \sum_{k=3}^{N} k\ \mathbb{P}(V_k) \\
= & \sum_{k=2}^{N-1} (k+1)\ \mathbb{P}(V_k) \ - \ \sum_{k=3}^{N} k\ \mathbb{P}(V_k) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \ 3 + \sum_{k=3}^{N-1} (k+1)\ \mathbb{P}(V_k) \ - \ \sum_{k=3}^{N} k\ \mathbb{P}(V_k) && \textit{(car } V_2 = \Omega \textit{ et donc } \mathbb{P}(V_2) = 1\textit{)} \\
= & \ 3 + \sum_{k=3}^{N-1} k\ \mathbb{P}(V_k) \ + \ \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) \ - \ \sum_{k=3}^{N} k\ \mathbb{P}(V_k) \\
= & \ 3 + \cancel{\sum_{k=3}^{N-1} k\ \mathbb{P}(V_k)} \ + \ \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) \ - \ \left(\cancel{\sum_{k=3}^{N-1} k\ \mathbb{P}(V_k)} \ + \ N\ \mathbb{P}(V_N)\right)
\end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) \ &= \ \sum_{k=3}^{N-1} \left(3\ \left(\frac{2}{3}\right)^k - 3\ \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.d)}}\textit{)} \\
&= \ 3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k \ - \ 3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k && \textit{(par linéarité de la somme)}
\end{aligned}$$

Or, d'après la formule des sommes géométriques :

$$\begin{aligned}
3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k \ &= \ 3\ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \ - \ \left(\frac{2}{3}\right)^N}{1 - \frac{2}{3}} \\
&= \ 3\ \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \ - \ \left(\frac{2}{3}\right)^N}{\frac{1}{3}} \\
&= \ 9\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \ - \ 9\ \left(\frac{2}{3}\right)^N \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ 9\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 0 && \textit{(car } \tfrac{2}{3} \in \,]-1,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 9\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \cancel{9} \times \frac{8}{\cancel{3 \times 3} \times 3} = \frac{8}{3}}$$

De la même manière :

$$3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \ = \ 3\ \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \ - \ \left(\frac{1}{3}\right)^N}{1 - \frac{1}{3}} \ = \ \frac{9}{2}\ \left(\frac{1}{3}\right)^3 \ - \ \frac{9}{2}\ \left(\frac{1}{3}\right)^N \ \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ \frac{9}{2}\ \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\boxed{3 \sum_{k=3}^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{2}\ \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{\cancel{9}}{2} \times \frac{1}{\cancel{3 \times 3} \times 3} = \frac{1}{6}}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
N\ \mathbb{P}(V_N) &= N \left(3 \left(\frac{2}{3}\right)^N - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^N\right) \\
&= 3\ \frac{N}{\left(\frac{3}{2}\right)^N} - 3\ \frac{N}{3^N} \\
&\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 3 \times 0 - 3 \times 0 \qquad \textit{(car, comme } \tfrac{3}{2} > 1 \textit{ et } 3 > 1, \\
& \qquad\qquad N = \underset{N \to +\infty}{o}\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^N\right) \textit{ et } N = \underset{N \to +\infty}{o}(3^n) \ \textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{N\ \mathbb{P}(V_N) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

- Finalement, la v.a.r. T admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \lim_{N \to +\infty} \left(3 + \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) - N\ \mathbb{P}(V_N)\right) \\
&= 3 + \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=3}^{N-1} \mathbb{P}(V_k) - \lim_{N \to +\infty} N\ \mathbb{P}(V_N) \\
&= 3 + \frac{8}{3} - \frac{1}{6} \\
&= 3 + \frac{15}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = 3 + \frac{15}{6} = \frac{18}{6} + \frac{15}{16} = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer, que pour tout $k \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\,[T = k]\,) &= \mathbb{P}(V_{k-1}) - \mathbb{P}(V_k) \\
&= \left(3 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) - \left(3 \left(\frac{2}{3}\right)^k - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) \\
&= \left(3 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) - \left(\cancel{3}\ \frac{2}{\cancel{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \cancel{3}\ \frac{1}{\cancel{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} (3-2) + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} (-3+1) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

Commentaire

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{N} k\,\mathbb{P}\big([T=k]\big) &= \sum_{k=3}^{N} k\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=3}^{N} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=3}^{N} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 1\left(\frac{2}{3}\right)^{0} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\right) \\
&\quad - \left(2\left(\sum_{k=1}^{N-1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k} - 1\left(\frac{1}{3}\right)^{0} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 1 - \cancel{\frac{4}{3}} - 2\sum_{k=1}^{N-1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k} + 2 + \cancel{\frac{4}{3}} \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - 2\,\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + 1
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - 2\,\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + 1 &= \frac{1}{(\frac{1}{3})^2} - 2\,\frac{1}{(\frac{2}{3})^2} + 1 \\
&= 3^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 \\
&= 3^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

□

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. a) Donner la loi du couple (X_2, W_2).

Démonstration.

- D'après ***1.a)*** : $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{\text{D'où : } X_2(\Omega) = [\![0,2]\!].}$$

- Par définition de la v.a.r. W_2, on a : $W_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$.
En effet, après le placement de 2 jetons, deux cas se présentent :
  × les 2 jetons sont dans la même urne, et donc 2 urnes restent vides. La v.a.r. W_2 prend alors la valeur 2.
  × les 2 jetons sont dans des urnes différentes, et donc 1 urne reste vide. La v.a.r. W_2 prend alors la valeur 1.

$$\boxed{W_2(\Omega) = [\![1,2]\!]}$$

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\begin{array}{rcl} A_i & = & \text{« le jeton numéro } i \text{ est déposé dans l'urne } U_1 \text{ »} \\ B_i & = & \text{« le jeton numéro } i \text{ est déposé dans l'urne } U_2 \text{ »} \\ C_i & = & \text{« le jeton numéro } i \text{ est déposé dans l'urne } U_3 \text{ »} \end{array}$$

× Déterminons $\mathbb{P}\big([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1] \big)$.

L'événement $[X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $[X_2 = 0]$ est réalisé `ET` l'événement $[W_2 = 1]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 ne contient aucun jeton `ET` 1 urne est vide

$\Leftrightarrow$ Après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 ne contient aucun jeton `ET` les urnes U_2 et U_3 contiennent exactement 1 jeton

$\Leftrightarrow$ Le jeton numéro 1 est déposé dans l'urne U_2 `ET` le jeton numéro 2 est déposé dans l'urne U_3
`OU` le jeton numéro 1 est déposé dans l'urne U_3 `ET` le jeton numéro 2 est déposé dans l'urne U_2

$\Leftrightarrow$ L'événement $B_1 \cap C_2$ est réalisé
`OU` l'événement $C_1 \cap B_2$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $\big(B_1 \cap C_2\big) \cup \big(C_1 \cap B_2\big)$ est réalisé

On en déduit :

$$[X_2 = 0] \cap [W_2 = 1] \ = \ \big(B_1 \cap C_2\big) \cup \big(C_1 \cap B_2\big)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}\big([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1] \big) & \\ = & \mathbb{P}\Big(\big(B_1 \cap C_2\big) \cup \big(C_1 \cap B_2\big) \Big) & \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap C_2\big) + \mathbb{P}\big(C_1 \cap B_2\big) & \textit{(car les événements } B_1 \cap C_2 \textit{ et } C_1 \cap B_2 \textit{ sont incompatibles)} \\ = & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}(B_2) & \textit{(par indépendance des placements des jetons)} \\ = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} & \textit{(car, pour chaque jeton, le choix de l'urne est équiprobable)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1] \big) = \frac{2}{9}.}$$

× Déterminons $\mathbb{P}\big([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2] \big)$.

L'événement $[X_2 = 0] \cap [W_2 = 2]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $[X_2 = 0]$ est réalisé `ET` l'événement $[W_2 = 2]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 ne contient aucun jeton `ET` 2 urnes sont vides

$\Leftrightarrow$ L'urne U_2 contient exactement 2 jetons
`OU` l'urne U_3 contient exactement 2 jetons

$\Leftrightarrow$ L'événement $B_1 \cap B_2$ est réalisé
`OU` l'événement $C_1 \cap C_2$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $\big(B_1 \cap B_2\big) \cup \big(C_1 \cap C_2\big)$ est réalisé

On en déduit :

$$[X_2 = 0] \cap [W_2 = 2] \ = \ \big(B_1 \cap B_2\big) \cup \big(C_1 \cap C_2\big)$$

Ainsi, avec les mêmes arguments que pour le point précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2] \big) &= \mathbb{P}\Big(\big(B_1 \cap B_2\big) \cup \big(C_1 \cap C_2\big) \Big) \\
&= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}(C_2) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \ = \ \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2] \big) = \frac{2}{9}.}$$

× Déterminons $\mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1] \big)$.
On remarque :

$$[X_2 = 1] \ \subset \ [W_2 = 1]$$

En effet, si $[X_2 = 1]$ est réalisé, c'est que, après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 ne contient qu'un seul jeton. Le 2^{nd} jeton a donc été déposé soit dans l'urne U_2, soit dans l'urne U_3. Après cette répartition, il reste donc une seule urne vide. Autrement dit, l'événement $[W_2 = 1]$ est alors réalisé.
On en déduit :

$$[X_2 = 1] \cap [W_2 = 1] \ = \ [X_2 = 1]$$

Ainsi, d'après ***1.a)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1] \big) &= \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \big) \\
&= \binom{2}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{2-1} \\
&= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1] \big) = \frac{4}{9}.}$$

× Déterminons $\mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]\big)$.

$$\begin{array}{rlcl} & \text{L'événement } [X_2 = 1] \cap [W_2 = 2] \text{ est réalisé} & & \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } [X_2 = 1] \text{ est réalisé} & \texttt{ET} & \text{l'événement } [W_2 = 2] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{l}\text{Après la répartition de 2 jetons, l'urne} \\ U_1 \text{ contient exactement 1 jeton}\end{array} & \texttt{ET} & \text{2 urnes sont vides} \end{array}$$

Ceci n'est jamais réalisé. En effet, après la répartition de 2 jetons, si l'urne U_1 en contient exactement 1, alors le 2^{nd} est nécessairement dans l'urne U_2 ou l'urne U_3. Et ainsi il n'y a qu'une seule urne vide (et non 2).
On en déduit :

$$[X_2 = 1] \cap [W_2 = 2] \ = \ \varnothing$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

× Déterminons $\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]\big)$.

$$\begin{array}{rlcl} & \text{L'événement } [X_2 = 2] \cap [W_2 = 2] \text{ est réalisé} & & \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } [X_2 = 2] \text{ est réalisé} & \texttt{ET} & \text{l'événement } [W_2 = 2] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{l}\text{Après la répartition de 2 jetons, l'urne} \\ U_1 \text{ contient exactement 2 jeton}\end{array} & \texttt{ET} & \text{exactement 1 urne est vide} \end{array}$$

Ceci n'est jamais réalisé. En effet, après la répartition de 2 jetons, si l'urne U_1 en contient exactement 2, alors les urnes U_2 et U_3 sont vides. Et ainsi il y a 2 urnes vides (et non 1).
On en déduit :

$$[X_2 = 2] \cap [W_2 = 1] \ = \ \varnothing$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

× Déterminons $\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]\big)$.
On remarque :

$$[X_2 = 2] \ \subset \ [W_2 = 2]$$

En effet, si $[X_2 = 2]$ est réalisé, c'est que, après la répartition de 2 jetons, l'urne U_1 contient les 2 jetons. Les urnes U_2 et U_3 sont donc vides. Après cette répartition, il reste donc 2 urnes vides. Autrement dit, l'événement $[W_2 = 2]$ est alors réalisé.
On en déduit :

$$[X_2 = 2] \cap [W_2 = 2] \ = \ [X_2 = 2]$$

Ainsi, d'après ***1.b)*** :

$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X_2 = 2]\big) \ = \ \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]\big) = \frac{1}{9}.}$$

Commentaire

- Notons que la famille $\big([X_2 = i] \cap [W_2 = j] \big)_{\substack{i \in [\![0,2]\!] \\ j \in [\![1,2]\!]}}$ est un système complet d'événements. Ainsi :
$$\sum_{i=0}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}\big([X_2 = i] \cap [W_2 = j] \big) \right) \;=\; 1$$
- On peut ici utiliser ce résultat comme mesure de vérification :
$$\sum_{i=0}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \mathbb{P}\big([X_2 = i] \cap [W_2 = j] \big) \right) \;=\; \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + 0 + 0 + \frac{1}{9} \;=\; 1$$

□

b) En déduire la loi de W_2, et calculer son espérance.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $W_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$.
- Déterminons $\mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big)$.
La famille $\big([X_2 = i] \big)_{i \in [\![0,2]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :
$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big) \\ = & \mathbb{P}\big([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1] \big) \;+\; \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1] \big) \;+\; \mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1] \big) \\ = & \dfrac{2}{9} \;+\; \dfrac{4}{9} \;+\; 0 \end{array}$$
où la dernière égalité est obtenue à l'aide de la question précédente.
$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.}$$
- Enfin, la famille $\big([W_2 = 1]\,, [W_2 = 2] \big)$ forme un système complet d'événements. Ainsi :
$$\mathbb{P}\big([W_2 = 2] \big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big) \;=\; 1 - \frac{2}{3} \;=\; \frac{1}{3}$$
$$\boxed{\mathbb{P}\big([W_2 = 2] \big) = \frac{1}{3}}$$
- On sait : $W_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$. La v.a.r. W_2 est donc finie.
$$\boxed{\text{La v.a.r. } W_2 \text{ admet donc une espérance.}}$$
- De plus :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(W_2) & = & 1 \times \mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big) + 2 \times \mathbb{P}\big([W_2 = 2] \big) \\ & = & \dfrac{2}{3} + 2 \times \dfrac{1}{3} \end{array}$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(W_2) = \frac{4}{3}.}$$

□

c) Calculer la covariance de X_2 et W_2.

Démonstration.

- Les v.a.r. X_2 et W_2 sont finies. Elles admettent donc chacune un moment d'ordre 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X_2 \text{ et } W_2 \text{ admettent une covariance.}}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Cov}(X_2, W_2) & = & \mathbb{E}(X_2\, W_2) - \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(W_2) & \\ & = & \mathbb{E}(X_2\, W_2) - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{3} & \textit{(car, d'après } \textbf{\textit{1.a)}} : X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \dfrac{1}{3}\right) \\ & & & \textit{et d'après la question précédente)} \end{array}$$

- Il reste à calculer $\mathbb{E}(X_2\, W_2)$. Par théorème de transfert :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_2\, W_2) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} i\, j\, \mathbb{P}\big([X_2 = i] \cap [W_2 = j] \big) \right) \\ & = & \cancel{\displaystyle\sum_{j=1}^{2} 0 \times j\, \mathbb{P}\big([X_2 = 0] \cap [W_2 = j] \big)} \\ & & + \displaystyle\sum_{j=1}^{2} 1 \times j\, \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = j] \big) \\ & & + \displaystyle\sum_{j=1}^{2} 2 \times j\, \mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = j] \big) \end{array}$$

Or :

× d'une part :

$$\begin{array}{rll} & \displaystyle\sum_{j=1}^{2} j\, \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = j] \big) & \\ = & 1 \times \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1] \big) + 2 \times \mathbb{P}\big([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2] \big) & \\ = & \dfrac{4}{9} + 2 \times 0 & \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\ = & \dfrac{4}{9} & \end{array}$$

× d'autre part :

$$\begin{array}{rll} & \displaystyle\sum_{j=1}^{2} 2 \times j\, \mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = j] \big) & \\ = & 2 \times \mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1] \big) + 4 \times \mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2] \big) & \\ = & 2 \times 0 + 4 \times \dfrac{1}{9} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\ = & \dfrac{4}{9} & \end{array}$$

Ainsi : $\mathbb{E}(X_2\, W_2) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{8}{9}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Cov}(X_2, W_2) = \dfrac{8}{9} - \dfrac{8}{9} = 0.}$$

□

d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'une part, d'après ***7.a)*** :
$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1] \big) \ = \ 0$$
- D'autre part :
  - × d'après ***1.b)*** : $\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.
  - × d'après ***7.b)*** : $\mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big) = \dfrac{2}{3}$.

  D'où :
$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \big) \times \mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big) \ \neq \ 0$$

Ainsi :
$$\mathbb{P}\big([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1] \big) \ \neq \ \mathbb{P}\big([X_2 = 2] \big) \times \mathbb{P}\big([W_2 = 1] \big)$$

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_2 \text{ et } W_2 \text{ ne sont donc pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- Profitons de cette question pour rappeller que deux v.a.r. **discrètes** U et V sont indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :
$$\boxed{\forall u \in U(\Omega), \forall v \in V(\Omega),\ \mathbb{P}([U = u] \cap [V = v]) \ = \ \mathbb{P}([U = u]) \times \mathbb{P}([V = v])}$$
  Ainsi, U et V ne sont pas indépendantes si :
$$\boxed{\exists u \in U(\Omega), \exists v \in V(\Omega),\ \mathbb{P}([U = u] \cap [V = v]) \ \neq \ \mathbb{P}([U = u]) \times \mathbb{P}([V = v])}$$
  C'est donc la définition qui nous permet de conclure que X_2 et W_2 ne sont pas indépendantes.
- Profitons-en aussi pour rappeler le lien entre covariance et indépendance :
$$\boxed{U \text{ et } V \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(U, V) = 0}$$
  Généralement c'est la contraposée de cet énoncé qui est utilisée.
  Elle permet de démontrer que deux v.a.r. U et V ne sont pas indépendantes.
$$\boxed{\mathrm{Cov}(U, V) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad U \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes}}$$
  Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence.
  Les v.a.r. X_2 et W_2 illustrent ce point puisque ces v.a.r. :
  - × ne sont pas indépendantes,
  - × vérifient $\mathrm{Cov}(X_2, W_2) = 0$.

□

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

8. Déterminer $W_n(\Omega)$.

Démonstration.

- La v.a.r. W_n est à valeurs dans $[\![0,3]\!]$, car elle prend pour valeur le nombre d'urnes vides parmi les 3 urnes U_1, U_2 et U_3 (après le placement des n premiers jetons). On en déduit : $W_n(\Omega) \subset [\![0,3]\!]$.
- On peut être plus précis. On se place à partir de cette question ***8.*** dans le cas : $n \geqslant 3$. On dépose donc, en tout, dans les urnes, au moins 3 jetons. Ainsi, la v.a.r. W_n :
  - × ne peut pas prendre la valeur 3 car, comme plus d'un jeton est placé, les urnes ne peuvent être vides toutes les 3.
  - × peut prendre la valeur 2. C'est par exemple le cas lorsque l'urne 1 reçoit les n premiers jetons.
  - × peut prendre la valeur 1. C'est par exemple le cas lorsque :
    - l'urne 1 reçoit le jeton 1,
    - l'urne 2 reçoit les $n-1$ jetons suivants.
  - × peut prendre la valeur 0. C'est par exemple le cas lorsque :
    - l'urne 1 reçoit le jeton 1,
    - l'urne 2 reçoit le jeton 2,
    - l'urne 3 reçoit les $n-2$ jetons suivants.

$$\boxed{\text{Ainsi, } W_n \text{ peut prendre les valeurs 0, 1 et 2. Autrement dit : } W_n(\Omega) = [\![0,2]\!].}$$

□

9. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

Commentaire

- Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, la v.a.r. $W_{n,i}$ est un cas particulier de v.a.r. dites *variables aléatoires indicatrices*. On appelle variable aléatoire indicatrice d'un événement A, et on note $\mathbb{1}_A$ la v.a.r. définie par :

$$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Autrement dit, la v.a.r. $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 1 si A est réalisé, et prend la valeur 0 sinon.
- Ici, la v.a.r. $W_{n,1}$ prend la valeur 1 si l'urne 1 est encore vide après le placement des n premiers jetons, et prend la valeur 0 sinon. Autrement dit, la v.a.r. $W_{n,1}$ prend la valeur 1 si l'événement $[X_n = 0]$ est réalisé, et prend la valeur 0 sinon. Ainsi :

$$W_{n,1} \; = \; \mathbb{1}_{[X_n=0]}$$

  En raisonnant de même, on obtient :

$$W_{n,2} \; = \; \mathbb{1}_{[Y_n=0]} \qquad \text{et} \qquad W_{n,3} \; = \; \mathbb{1}_{[Z_n=0]}$$

Commentaire

- Ce type de v.a.r. ne fait pas partie du programme d'ECE. Donnons néanmoins certaines de leurs propriétés.
  × Loi de $\mathbb{1}_A$.
  - Par définition de $\mathbb{1}_A$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 et 1.
    Donc $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$.
  - Soit $\omega \in \Omega$.
  $$\omega \in [\mathbb{1}_A = 1] \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \ \Leftrightarrow\ \omega \in A$$
    D'où : $[\mathbb{1}_A = 1] = A$. Ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_A = 1]) = \mathbb{P}(A)$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

  × En particulier :
  $$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)\big(1 - \mathbb{P}(A)\big)$$
- Il peut aussi être utile de savoir démontrer les propriétés suivantes.
  Soient B et C deux événements.
  1) $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$
  2) $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\overline{B}} = 1$

  Pour la démonstration de la propriété ***1)***, on pourra se référer sujet `ESSEC-II 2018`. La propriété ***2)*** est démontrée dans une remarque du sujet `ESSEC-II 2021`.

a) Démontrer : $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1,3]\!]$.
  Par définition de $W_{n,i}$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 et 1. Donc : $W_{n,i}(\Omega) = \{0,1\}$.

  $\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1,3]\!], \text{ la v.a.r. } W_{n,i} \text{ est donc finie. On en déduit qu'elle admet une espérance.}}$

- Commençons par déterminer $\mathbb{E}(W_{n,1})$:
  $$\mathbb{E}(W_{n,1}) \ = \ \cancel{0 \times \mathbb{P}\big([W_{n,1} = 0]\big)} + 1 \times \mathbb{P}\big([W_{n,1} = 1]\big)$$
  Or : L'événement $[W_{n,1} = 1]$ est réalisé $\Leftrightarrow$ l'urne 1 est encore vide après le placement des n premiers jetons
  $\Leftrightarrow$ la v.a.r. X_n prend la valeur 0
  $\Leftrightarrow$ l'événement $[X_n = 0]$ est réalisé

  On en déduit : $[W_{n,1} = 1] = [X_n = 0]$. D'où :
  $$\mathbb{E}(W_{n,1}) \ = \ \mathbb{P}\big([W_{n,1} = 1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) \ = \ \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \textit{(d'après 1.b))}$$
- En raisonnant de même, on obtient :
  $$\mathbb{E}(W_{n,2}) \ = \ \mathbb{P}\big([W_{n,2} = 1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y_n = 0]\big) \ = \ \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \textit{(d'après 1.b))}$$
  $$\mathbb{E}(W_{n,3}) \ = \ \mathbb{P}\big([W_{n,3} = 1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \ = \ \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \textit{(d'après 1.b))}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall i \in [\![1,3]\!],\ \mathbb{E}(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.}$$

□

b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

Démonstration.
Démontrons :
$$W_n \;=\; W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$$
Comme $n \geqslant 3$, alors au moins l'une des trois urnes contient 1 jeton, et n'est donc pas vide. Ainsi au moins l'une des v.a.r. $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ ou $W_{n,3}$ ne prend pas la valeur 1.
Trois cas se présentent donc.

- si exactement deux v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ prennent la valeur 1, alors :
  - la v.a.r. $W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ prend la valeur 2,
  - la v.a.r. W_n prend la valeur 2.
    En effet, si exactement deux v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ prennent la valeur 1, c'est que 2 urnes parmi les 3 sont vides après le placement des n premiers jetons.
- si exactement une v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ prennent la valeur 1, alors :
  - la v.a.r. $W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ prend la valeur 1,
  - la v.a.r. W_n prend la valeur 1.
    En effet, si exactement une v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ prennent la valeur 1, c'est que 1 urne parmi les 3 est vide après le placement des n premiers jetons.
- si aucune v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ ne prend la valeur 1, alors :
  - la v.a.r. $W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ prend la valeur 0,
  - la v.a.r. W_n prend la valeur 0.
    En effet, si aucune v.a.r. parmi $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ ne prend la valeur 1, c'est qu'aucune urne parmi les 3 n'est vide après le placement des n premiers jetons.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}}$$

Commentaire

- Comme l'énoncé demande de trouver la relation entre W_n, $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$, mais ne la fournit pas, on peut penser que la simple réponse « $W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$ » (sans justification) permet d'obtenir la majeure partie des points alloués à cette question. Évidemment, si la question s'exprimer sous la forme : « Démontrer : $W_n = \cdots$ », il faut détailler la réponse.
- Rappelons le résultat de la 1ère remarque de la question ***9.*** :
  $$W_{n,1} = \mathbb{1}_{[X_n=0]}, \qquad W_{n,2} = \mathbb{1}_{[Y_n=0]}, \qquad W_{n,3} = \mathbb{1}_{[Z_n=0]}$$
  Ainsi, toujours d'après cette même remarque :
  $$W_{n,1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)\right), \qquad W_{n,2} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}\big([Y_n = 0]\big)\right), \qquad W_{n,3} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}\big([2_n = 0]\big)\right)$$
  Grâce à la question ***1.b)***, on obtient :
  $$\forall i \in [\![1, 3]\!], \quad W_{n,i} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$
  La v.a.r. W_n est donc une somme de v.a.r. suivant une même loi de Bernoulli. On pourrait penser (dans un moment d'égarement) que, par stabilité par somme des lois binomiales : $W_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Il n'en est rien.

Commentaire

- La stabilité par somme des lois binomiales s'énoncé ainsi.

  Soit $p \in]0,1[$ et soit $(n_1, \ldots, n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$.

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p), \ldots, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p) \\ X_1, \ldots, X_k \textbf{ mutuellement indépendantes} \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 + \cdots + X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + \cdots + n_k, p)$$

  Cette propriété ne s'applique pas ici car les v.a.r. $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$ ne sont pas mutuellement indépendantes.

- Il est d'ailleurs aisé de constater que W_n ne suit pas la loi $\mathcal{B}\left(3, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Pour cela, on note D_n une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(3, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Montrons que D_n et W_n n'ont pas même loi.

  × D'après la question précédente : $\mathbb{P}([W_n = 3]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

  × Cependant : $\mathbb{P}([D_n = 3]) = \binom{3}{3} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{3-3} \neq 0$.

  Ainsi : $\mathbb{P}([W_n = 3]) \neq \mathbb{P}([D_n = 3])$. On en déduit que W_n et D_n n'ont pas la même loi. □

c) Exprimer alors $\mathbb{E}(W_n)$ en fonction de n.

Démonstration.

- La v.a.r. W_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } W_n \text{ admet une espérance.}}$$

- Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(W_n) & = & \mathbb{E}(W_{n,1}) + \mathbb{E}(W_{n,2}) + \mathbb{E}(W_{n,3}) & \\ & = & 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n & \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(W_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

□

10. Démontrer : $\mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 2]\Big) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 2]\Big)$?

Démonstration.

- On remarque :

$$[X_n = n] \subset [W_n = 2]$$

  En effet, si $[X_n = n]$ est réalisé, c'est que, après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient les n jetons. Les urnes U_2 et U_3 sont donc vides. Après cette répartition, il reste donc 2 urnes vides. Autrement dit, l'événement $[W_n = 2]$ est alors réalisé.
  On en déduit :

$$[X_n = n] \cap [W_n = 2] = [X_n = n]$$

Ainsi, d'après ***1.b)*** :

$$\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \big) \ = \ \mathbb{P}\big([X_n = n] \big) \ = \ \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \big) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.}$$

- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

	L'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 2]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événement $[X_n = k]$ est réalisé	`ET`	l'événement $[W_n = 2]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient exactement k jetons	`ET`	2 urnes sont vides

Ceci n'est jamais réalisé. En effet, après la répartition de n jetons, si l'urne U_1 en contient exactement k, alors les $n-k$ restants ($n-k \geqslant 1$ car $k \leqslant n-1$) sont nécessairement dans l'urne U_2 ou l'urne U_3. Et ainsi il n'y a qu'une seule urne vide au plus (et non 2).
On en déduit :

$$[X_n = k] \cap [W_n = 2] \ = \ \varnothing$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 2] \big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

□

11. Démontrer : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \Big) = \dfrac{2\dbinom{n}{k}}{3^n}$.

Que vaut $\mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 1] \Big)$?

Démonstration.

- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
  × Tout d'abord :

	L'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ est réalisé				
$\Leftrightarrow$	L'événement $[X_n = k]$ est réalisé	`ET`	l'événement $[W_n = 1]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient exactement k jetons	`ET`	exactement 1 urne est vide		
$\Leftrightarrow$	Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient exactement k jetons	`ET`	(l'urne U_2 est vide	`OU`	l'urne U_3 est vide)
$\Leftrightarrow$	L'événement $[X_n = k]$ est réalisé	`ET`	(l'événement $[W_{n,2} = 1]$ est réalisé	`OU`	l'événement $[W_{n,3} = 1]$ est réalisé)
$\Leftrightarrow$	L'événement $[X_n = k] \cap \big([W_{n,2} = 1] \cup [W_{n,3} = 1] \big)$ est réalisé				

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} [X_n = k] \cap [W_n = 1] & = & [X_n = k] \ \cap \ \big([W_{n,2} = 1] \cup [W_{n,3} = 1] \big) \\ & = & \big([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1] \big) \ \cup \ \big([X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1] \big) \end{array}$$

Or, les événements $[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]$ et $[X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1]$ sont incompatibles. D'où :

$$\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \big) \ = \ \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1] \big) + \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1] \big)$$

× Déterminons $\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1] \big)$.

L'événement $[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$	L'événement $[X_n = k]$ est réalisé	`ET`	l'événement $[W_{n,2} = 1]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient k jetons	`ET`	l'urne U_2 est vide
$\Leftrightarrow$	Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient k jetons	`ET`	l'urne U_3 contient $n-k$ jetons

- Choisir k jetons parmi les n premiers répartis revient à choisir une partie à k éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. En effet, choisir des jetons est équivalent à choisir leurs numéros. Ainsi, choisir k jetons, c'est choisir k éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
  On note alors $E = [\![1, n]\!]$, et $\mathcal{P}_k^n$ l'ensemble des parties à k éléments de E. Comme $\text{Card}(E) = \text{Card}\left([\![1, n]\!]\right) = n$, alors :
  $$\text{Card}(\mathcal{P}_k^n) \ = \ \binom{n}{k}$$
  On note alors E_1, ..., $E_{\binom{n}{k}}$ les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}_k^n$. Autrement dit, les ensembles E_1, ..., $E_{\binom{n}{k}}$ sont toutes les parties à k éléments de E.
- Reprenons maintenant l'équivalence :

L'événement $[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$		Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient k jetons	`ET`	l'urne U_3 contient $n-k$ jetons
$\Leftrightarrow$		Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient les jetons indexés par E_1	`ET`	l'urne U_3 contient les jetons indexés par $E \setminus E_1$
	`OU`	Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient les jetons indexés par E_2	`ET`	l'urne U_3 contient les jetons indexés par $E \setminus E_2$
	$\vdots$			
	`OU`	Après la répartition de n jetons, l'urne U_1 contient les jetons indexés par $E_{\binom{n}{k}}$	`ET`	l'urne U_3 contient les jetons indexés par $E \setminus E_{\binom{n}{k}}$

On en déduit :

L'événement $[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcap\limits_{i \in E_1} A_i$ est réalisé ET l'événement $\bigcap\limits_{j \in E \setminus E_1} C_j$ est réalisé

OU l'événement $\bigcap\limits_{i \in E_2} A_i$ est réalisé ET l'événement $\bigcap\limits_{j \in E \setminus E_2} C_j$ est réalisé

$\vdots$

OU l'événement $\bigcap\limits_{i \in E_{\binom{n}{k}}} A_i$ est réalisé ET l'événement $\bigcap\limits_{j \in E \setminus E_{\binom{n}{k}}} C_j$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $\Big(\bigcap\limits_{i \in E_1} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap\limits_{j \in E \setminus E_1} C_j\Big)$ est réalisé

OU l'événement $\Big(\bigcap\limits_{i \in E_2} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap\limits_{j \in E \setminus E_2} C_j\Big)$ est réalisé

$\vdots$

OU l'événement $\Big(\bigcap\limits_{i \in E_{\binom{n}{k}}} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap\limits_{j \in E \setminus E_{\binom{n}{k}}} C_j\Big)$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcup\limits_{\ell=1}^{\binom{n}{k}} \left(\Big(\bigcap\limits_{i \in E_\ell} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap\limits_{j \in E \setminus E_\ell} C_j\Big)\right)$ est réalisé

Ainsi :

$$[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1] \ = \ \bigcup_{\ell=1}^{\binom{n}{k}} \left(\Big(\bigcap_{i \in E_\ell} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{j \in E \setminus E_\ell} C_j\Big)\right)$$

- C'est une union d'événements incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]\,\big) \ = \ \sum_{\ell=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}\left(\Big(\bigcap_{i \in E_\ell} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{j \in E \setminus E_\ell} C_j\Big)\right)$$

- De plus, par indépendance des placements des jetons, pour tout $i \in [\![1, \binom{n}{k}]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Big(\bigcap_{i \in E_\ell} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{j \in E \setminus E_\ell} C_j\Big)\right) \ &= \ \prod_{i \in E_\ell} \mathbb{P}(A_i) \times \prod_{j \in E \setminus E_\ell} \mathbb{P}(C_j) \\
&= \ \prod_{i \in E_\ell} \frac{1}{3} \times \prod_{j \in E \setminus E_\ell} \frac{1}{3} && \textit{(car, pour chaque jeton, le choix de l'urne est équiprobable)} \\
&= \ \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} && \textit{(car, par définition de } E \textit{ et } E_\ell \textit{ : } \mathrm{Card}(E_\ell) = k \textit{ et } \mathrm{Card}(E \setminus E_\ell) = n-k\textit{)} \\
&= \ \left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\,[X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]\,\big) \ = \ \sum_{\ell=1}^{\binom{n}{k}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \ = \ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

× Avec un raisonnement tout à fait similaire au point précédent (il suffit d'intervertir le rôle de l'urne U_2 et celui de l'urne U_3), on obtient :

$$\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1]\big) = \binom{n}{k} \frac{1}{3^n}$$

× On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_{n,2} = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_{n,3} = 1]\big) \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{3^n} + \binom{n}{k} \frac{1}{3^n} \qquad \textit{(avec les points précédents)} \\ &= 2 \binom{n}{k} \frac{1}{3^n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\big) = 2 \binom{n}{k} \frac{1}{3^n}.}$$

Commentaire

- Un tel niveau de détail n'était pas attendu. Une explication moins rigoureuse aurait sûrement permis d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- On pouvait par exemple écrire que l'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ est réalisé si et seulement si, après répartition des n premiers jetons, l'urne 1 contient k jetons et les $n-k$ restants sont tous dans l'urne 2 ou tous dans l'urne 3. On a alors :
  × 2 possibilités pour le numéro de l'urne contenant les $n-k$ jetons restants (l'urne 2 ou l'urne 3),
  × $\binom{n}{k}$ possibilités pour les numéros des k jetons placés dans l'urne 1.

  Il y a de plus 3^n possibilités pour placer les n premiers jetons dans les 3 urnes U_1, U_2 et U_3. Comme le placement s'effectue de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1]\big) = \frac{2\binom{n}{k}}{3^n}$$

- De plus :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } [X_n = n] \cap [W_n = 1] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } [X_n = n] \text{ est réalisé} \quad \texttt{ET} \quad \text{l'événement } [W_n = 1] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{Après la répartition de } n \text{ jetons, l'urne } U_1 \text{ contient exactement } n \text{ jetons} \quad \texttt{ET} \quad \text{exactement 1 urne est vide} \end{array}$$

Ceci n'est jamais réalisé. En effet, après la répartition de n jetons, si l'urne U_1 en contient exactement n, alors les urnes U_2 et U_3 sont vides. Et ainsi il y a 2 urnes vides (et non 1).
On en déduit :

$$[X_n = n] \cap [W_n = 1] = \varnothing$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 1]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

□

12. Démontrer :

$$\mathbb{E}(X_n\, W_n) \;=\; 2\, n\, \mathbb{P}\Big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \Big) + \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \Big)$$

Démonstration.

- Les v.a.r. X_n et W_n sont finies. La v.a.r. $X_n\, W_n$ l'est donc aussi.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X_n\, W_n \text{ admet une espérance.}}$$

- On rappelle : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (car $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$) et $W_n(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ (d'après ***8.***). Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n\, W_n) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2} k\, j\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = j] \big) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(\cancel{k \times 0\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 0] \big)} + k \times 1 \times \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \big) \\
&\quad + \; k \times 2 \times \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 2] \big) \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \big) + 2 \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 2] \big)
\end{aligned}$$

  × D'une part, d'après la question ***11.*** :

$$\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 1] \big) = 0$$

  Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \big) \\
= \;& \cancel{0 \times \mathbb{P}\big([X_n = 0] \cap [W_n = 1] \big)} + \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \big) + n \times \mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 1] \big) \\
= \;& \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \big) + n \times 0 \\
= \;& \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 1] \big)
\end{aligned}$$

  × D'autre part, d'après la question ***10.*** :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 2] \big) \;=\; 0$$

  Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 2] \big) \\
= \;& \cancel{0 \times \mathbb{P}\big([X_n = 0] \cap [W_n = 2] \big)} + \sum_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [W_n = 2] \big) + n \times \mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \big) \\
= \;& \sum_{k=1}^{n-1} k \times 0 + n\, \mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \big) \\
= \;& n\, \mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 2] \big)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(X_n\, W_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\big(\, [X_n = k] \cap [W_n = 1]\,\big) + 2 \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\big(\, [X_n = k] \cap [W_n = 2]\,\big) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\big(\, [X_n = k] \cap [W_n = 1]\,\big) + 2\, n\, \mathbb{P}\big(\, [X_n = n] \cap [W_n = 2]\,\big)\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n\, W_n) = 2\, n\, \mathbb{P}\big(\, [X_n = n] \cap [W_n = 2]\,\big) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\big(\, [X_n = k] \cap [W_n = 1]\,\big)}$$

□

13. Démontrer alors : $\mathbb{E}(X_n\, W_n) = n \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Puis calculer la covariance de X_n et W_n.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(X_n\, W_n) & = & 2\, n\, \mathbb{P}\big(\, [X_n = n] \cap [W_n = 2]\,\big) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\, \mathbb{P}\big(\, [X_n = k] \cap [W_n = 1]\,\big) \\ & = & 2\, n \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \times 2 \dbinom{n}{k} \dfrac{1}{3^n} \qquad \textit{(d'après \textbf{10.} et \textbf{11.})} \\ & = & 2\, n \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 2\, \dfrac{1}{3^n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \dbinom{n}{k}\end{array}$$

- Calculons alors : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k \dbinom{n}{k}$.
  × On commence par remarquer :

$$k \binom{n}{k} \;=\; n \binom{n-1}{k-1}$$

Commentaire

- Cette relation classique est à connaître et à savoir démontrer. Il suffit pour cela de calculer $k \dbinom{n}{k}$ d'une part, et $n \dbinom{n-1}{k-1}$ d'autre part, à l'aide de la formule des coefficients binomiaux.
- Cette relation peut aussi se démontrer par dénombrement.
  Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.
  (on peut penser à une pièce qui contient n individus)
  On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant un élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure un représentant de ces individus)*.
  Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :
  1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{n}{k}$ possibilités.
  On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
  (on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)
  Ainsi, il y a $k \binom{n}{k}$ manières de construire P.
  2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.
  On choisit ensuite $k-1$ éléments dans E qui, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
  (on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $k-1$ individus)
  Ainsi, il y a $n \binom{n-1}{k-1}$ manières de construire P.
  On retrouve ainsi le résultat.

× On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} n \binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{n-1} \right) \\
&= n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} - 1 \right) \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} - n \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^k \, 1^{(n-1)-k} - n \\
&= n \, (1+1)^{n-1} - n && \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
&= n \, 2^{n-1} - n
\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n \, W_n) &= 2\, n \, \frac{1}{3^n} + 2 \, \frac{1}{3^n} \left(n \, 2^{n-1} - n \right) \\
&= \cancel{2\, n \, \frac{1}{3^n}} + 2 \, n \, \frac{2^{n-1}}{3^n} - \cancel{2\, n \, \frac{1}{3^n}} \\
&= n \, \frac{2^n}{3^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(X_n \, W_n) = n \left(\frac{2}{3} \right)^n.}$$

- Les v.a.r. X_n et W_n sont finies. Elles admettent donc un moment d'ordre 2, et donc une covariance. Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_n, W_n) &= \mathbb{E}(X_n \, W_n) - \mathbb{E}(X_n) \, \mathbb{E}(W_n) \\
&= n \left(\frac{2}{3} \right)^n - \mathbb{E}(X_n) \, \mathbb{E}(W_n) && \textit{(d'après ce qui précède)} \\
&= n \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{n}{\cancel{3}} \times \cancel{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n && \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{9.c)}}\textit{)} \\
&= n \left(\frac{2}{3} \right)^n - n \left(\frac{2}{3} \right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Cov}(X_n, W_n) = 0.}$$

□

14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\text{Cov}(X_n, W_n) = 0$.
- Or, les v.a.r. X_n et W_n ne sont pas indépendantes. En effet :
  - × d'une part, d'après ***11.*** :
  $$\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 1]\big) \ = \ 0$$
  - × d'autre part :
    - d'après ***1.b)*** : $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
    - de plus, comme $n \geqslant 3$: $\mathbb{P}\big([W_n = 1]\big) > 0$.

    D'où :
    $$\mathbb{P}\big([X_n = n] \times [W_n = 1]\big) \ > \ 0$$

  Ainsi :
  $$\mathbb{P}\big([X_n = n] \cap [W_n = 1]\big) \ \neq \ \mathbb{P}\big([X_n = n]\big) \times \mathbb{P}\big([W_n = 1]\big)$$
  Les v.a.r. X_n et W_n ne sont donc pas indépendantes.

On obtient un contre-exemple à la réciproque du résultat du cours : U et V indépendantes $\quad \Rightarrow \quad \text{Cov}(U, V) = 0$

Commentaire

- On pourrait calculer explicitement $\mathbb{P}\big([W_n = 1]\big)$ pour démontrer : $\mathbb{P}\big([W_n = 1]\big) > 0$. Cela demande un temps conséquent, mais donnons ici les principaux arguments :

  1) On remarque : $V_n = [W_n \geqslant 1]$. Ainsi :
  $$V_n \ = \ [W_n = 1] \cup [W_n = 2]$$
  Par incompatiblité des événements $[W_n = 1]$ et $[W_n = 2]$, on obtient :
  $$\mathbb{P}\big([W_n = 1]\big) \ = \ \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}\big([W_n = 2]\big)$$

  2) On constate ensuite :
  $$[W_n = 2] \ = \ [X_n = n] \cup [Y_n = n] \cup [Z_n = n]$$
  Or les événements $[X_n = n]$, $[Y_n = n]$ et $[Z_n = n]$ sont incompatibles, donc :
  $$\mathbb{P}\big([W_n = 2]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([X_n = n]\big) + \mathbb{P}\big([Y_n = n]\big) + \mathbb{P}\big([Z_n = n]\big) \ = \ 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)}$$

  3) En utilisant la question ***1.e)***, on obtient :
  $$\mathbb{P}\big([W_n = 1]\big) \ = \ 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \ = \ 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

  4) Enfin, il reste à démontrer que cette probabilité est non nulle si $n \geqslant 3$. Une résolution d'équation démontre qu'elle est non nulle si et seulement si $n \neq 1$.

Commentaire

- Cette démonstration n'est pas exigée. On peut d'ailleurs, sans calcul, se convaincre facilement du résultat : $\mathbb{P}\big([W_n = 1]\big) > 0$. En effet :
  × lors des n premières étapes de l'expérience (placement des n premiers jetons), il y a équiprobabilités des configurations possibles. Ainsi :
  $$\mathbb{P}\big([W_n = 1]\big) = \frac{\text{nombre de configurations réalisant } [W_n = 1]}{\text{nombre de configurations possibles au total}}$$
  × or il existe bien des configurations réalisant $[W_n = 1]$. Par exemple la configuration :
  $$\big(1, \underbrace{2, \ 2, \ \ldots, 2}_{n-1 \text{ fois}}\big)$$
  (le jeton 1 est placé dans l'urne 1, le jeton 2 dans l'urne 2, le jeton 3 dans l'urne 2, $\ldots$, le jeton n dans l'urne 2)
  Comme le nombre de configurations réalisant $[W_n = 1]$ est strictement positif, alors, avec la formule du point précédent, on obtient bien : $\mathbb{P}\big([W_n = 1]\big) > 0$.

$\square$