
DS6 (Maths I - version B)

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.

La partie 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.

Les parties 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question 17, la partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^+ ;
- une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J .
- une famille $(X_t)_{t \in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans \mathbb{N} et indépendantes de Y** telles que pour tout $t \in J$:

$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t .

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.

On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0, 1]$ par :

$$f_k(t) = \mathbb{P}([X_t = k])$$

1. *Un exemple avec Python.* On considère le script **Python** suivant :

```
1 import numpy.random as rd
2 def X(t) :
3     r = 1
4     while rd.random() > ... :
5         r = ...
6     return r
7
8 Y = rd.random()
9 Z = ...
10 print(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $J =]0, 1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont Y est une simulation, compléter le script précédent pour que Z soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$.

- *Cas où Y est discrète.* On suppose dans les questions 2. et 3. que Y est discrète.

2. a) Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = y]) = f_k(y) \mathbb{P}([Y = y])$$

et si $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z = k]) = f_k(y)$$

b) En déduire :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{E}(f_k(Y)) \quad (1)$$

c) *Un exemple où $J = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[[1, n]]$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\mathbb{P}([Y = n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p .

3. On suppose que pour tout $t \in J$, $\mathbb{E}(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $\mathbb{E}(g(Y))$ existe.

a) Démontrer :

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) \mathbb{P}([Y = y]) \right)$$

b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $\mathbb{E}(Z)$ existe et :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(Y)) \quad (2)$$

• On admet que les résultats établis dans les questions 2. et 3., en particulier (1) et (2), sont encore vrais lorsque Y n'est plus discrète.

4. *Un premier exemple.* On suppose que $J =]0, 1[$, que la loi de X_t est la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{k(k+1)}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

b) Que vaut $\mathbb{E}(X_t)$ en fonction de t ? Si l'on note g cette fonction de t , que peut-on dire de $\mathbb{E}(g(Y))$?

5. *Un deuxième exemple.* On suppose que $J = [0, +\infty[$, que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.

Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda e^{-(\lambda+1)t} dt = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx$$

b) En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx = 1$$

c) Déterminer la loi de Z . Reconnaître la loi de $Z + 1$.

d) En déduire $\mathbb{E}(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'égalité (2) ?

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ ($n \in \mathbb{N}$) ;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$ -uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant été infecté k jours plus tôt.

Autrement dit, on peut considérer que α_k , lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

Finalement, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont tels que, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\alpha_k \in]0, 1[$ et on note $\alpha = \sum_{k=0}^d \alpha_k$,

ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.

On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$.

On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.

On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathbb{E}(R_n)$ et on pose $r_n = \mathbb{E}(R_n)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n -ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n -ième jour, définie par :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \quad (*)$$

- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :

$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$

où \mathcal{P} désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n .

6. Donner une justification de (*).

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(I_n)$ existe. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n \mathbb{E}(I_n)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \quad (3)$$

8. Programmation de z_n avec **Python**.

On suppose que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{n+2}{n+1}$.

On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \ \dots \ \alpha_d)$.

Écrire une fonction **Python** d'entête `def z(Delta,n)` : qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ . Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `len(Delta)` qui donne le nombre d'éléments de `Delta`.

9. Soit $(U_n)_{n \geq 0}$, $(V_n)_{n \geq 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.
 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

• On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir, pour tout $p \geq d$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.

d) (CUBES UNIQUEMENT) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

11. a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = \mathbb{E}(e^{-Y_n})$$

b) On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x réel, $e^{-x} \geq 1 - x$).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout réel x , on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x .

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on pose $a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geq N$, $r_n \alpha \leq \rho$.
 On note (H_1) cette hypothèse.

a) Que vaut $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^d a_k t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\theta^{d+1} \geq \rho \left(\sum_{k=0}^d a_k \theta^{d-k} \right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

• On pose $M = \max_{k \in \llbracket N, N+d \rrbracket} \frac{z_k}{\theta^k}$.

b) Démontrer, pour tout $n \geq N$: $z_n \leq M \theta^n$.

c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geq N$, $r_n \alpha \geq \rho$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions **13.** à **16.**, que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante de valeur $\frac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec $z_{-1} = \dots = z_{-d} = 0$.

- 13. a)** Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = (a_0 \ \dots \ a_d)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A U_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $U_n = A^n U_0$ puis que $z_{n+1} = L A^n U_0$.

- 14.** Dans cette question, $d = 2$ et $L = (\frac{1}{6} \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6})$.

a) Démontrer : $\text{Sp}(A) = \{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$.

b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal à 1.

c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3$.

d) En déduire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s_1 .

- 15.** On revient au cas général.

a) Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^d a_{d-k} \lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.

c) Établir que $-1 \notin \text{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \text{Sp}(A)$.

- 16.** On pose pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $b_k = \sum_{i=k}^d a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$

formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum_{k=0}^d b_k w_k = 0$.

a) Démontrer, pour tout $W \in H$: $A W \in H$.

b) Déterminer l'unique réel s tel que : $U_0 - s V \in H$.

c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $L A^n W \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = s$.

- 17.** Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?