DS6 barème (Maths I - version B)

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.
La **Partie** 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.
Les **Parties** 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question *17*, la **Partie** 3 est indépendante des **Parties** 1 et 2.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

× un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}_+$;

× une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J.

× une famille $(X_t)_{t\in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ et **indépendantes de** Y telles que pour tout $t \in J$:

$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.
On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0,1]$ par :

$$f_k(t) \;=\; \mathbb{P}(\,[X_t = k]\,)$$

1. *Un exemple avec* ***Python****.* On considère le script **Python** suivant :

```
1  import numpy.random as rd
2  def X(t) :
3      r = 1
4      while rd.random() > ... :
5          r = ...
6      return r
7
8  Y = rd.random()
9  Z = ...
10 print(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $J = \,]0,1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont `Y` est une simulation, compléter le script précédent pour que `Z` soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$.

- **1 pt :**

```
4  while rd.random() > t:
```

- **1 pt :**

```
5      r = r + 1
```

- **1 pt :**

```
9  Z = X(Y)
```

- **1 pt : point de bonification si tout est juste**

- *Cas où Y est discrète.* On suppose dans les questions *2.* et *3.* que Y est discrète.

2. a) Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big([Z = k] \cap [Y = y] \big) \ = \ f_k(y) \ \mathbb{P}\big([Y = y] \big)$$

et si $\mathbb{P}\big([Y = y] \big) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}\big([Z = k] \big) \ = \ f_k(y)$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Z = k] \cap [Y = y] \big) = \mathbb{P}\big([X_y = k] \cap [Y = y] \big)$
- **1 pt : indépendance**
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Y=y]}\big([Z = k] \big) = \dfrac{\mathbb{P}\big([Z = k] \cap [Y = y] \big)}{\mathbb{P}\big([Y = y] \big)}$

b) En déduire :

$$\mathbb{P}\big([Z = k] \big) \ = \ \mathbb{E}\big(f_k(Y) \big) \qquad (1)$$

- **1 pt : La famille $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements**
- **1 pt : FPT :** $\mathbb{P}\big([Z = k] \big) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([Y = y] \cap [Z = k] \big)$
- **1 pt : d'après le théorème de transfert :** $\mathbb{E}\big(f_k(Y) \big) \ = \ \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} f_k(y) \ \mathbb{P}\big([Y = y] \big)$
- **1 pt : la série converge absolument (SATP convergente)**

c) Un exemple où $J = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \,]0, 1[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\big([Y = n] \big) \ = \ n \, p^2 \, (1-p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p.

- **1 pt : D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Y = n] \big) \neq 0$. On peut donc considérer : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la v.a.r. Y est une v.a.r. discrète**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Z = k] \big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k] \big) \ \mathbb{P}\big([Y = n] \big)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k] \big) \ \mathbb{P}\big([Y = n] \big) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k] \big) \ \mathbb{P}\big([Y = n] \big)$
- **1 pt : somme d'une série géométrique de raison $(1-p) \in \,]0, 1[$**
- **1 pt :** $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Z = k] \big) \ = \ p \ (1-p)^{k-1}$**. On en conclut :** $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)$

3. On suppose que pour tout $t \in J$, $\mathbb{E}(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $\mathbb{E}\big(g(Y) \big)$ existe.

a) Démontrer :

$$\mathbb{E}\big(g(Y) \big) \ = \ \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k \, f_k(y) \ \mathbb{P}\big([Y = y] \big) \right)$$

- **1 pt : D'après le théorème de transfert,** $\mathbb{E}\big(g(Y) \big) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} g(y) \ \mathbb{P}\big([Y = y] \big)$

- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(g(Y)\big) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k \ \mathbb{P}\big([X_y = k] \big) \right) \mathbb{P}\big([Y = y] \big)$ **car** X_y **est à valeurs dans** $\mathbb{N}$

b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $\mathbb{E}(Z)$ existe et :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ \mathbb{E}\big(g(Y)\big) \qquad (2)$$

- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(g(Y)\big) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k \ \mathbb{P}\big([Z = k] \big)$
- **1 pt : la v.a.r.** Z **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} k \ \mathbb{P}\big([Z = k] \big)$ **est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car cette série est à termes positifs. Le point précédent démontre que cette série est convergente et que sa somme n'est autre que la quantité** $\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$

- *On admet que les résultats établis dans les questions **2.** et **3.**, en particulier* (1) *et* (2)*, sont encore vrais lorsque* Y *n'est plus discrète.*

4. *Un premier exemple.* On suppose que $J = \,]0,1[$, que la loi de X_t est la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([Z = k] \big) = \dfrac{1}{k\,(k+1)}$.
La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

- **1 pt : la fonction** f_Y **est nulle en dehors de** $[0,1]$
- **1 pt : la fonction** f_k **est continue sur** $]0,1[$ **en tant que fonction polynomiale**
- **1 pt : d'après le théorème de transfert, la v.a.r.** $f_k(Y)$ **admet une espérance si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 f_k(t) \ f_Y(t) \ dt$ **est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car l'intégrande est positive**
- **1 pt : On procède alors par intégrations par parties (IPP).**

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \quad & u'(t) & = & 1 \\[2mm] v'(t) & = & (1-t)^{k-1} & \quad & v(t) & = & -\dfrac{(1-t)^k}{k} \end{array} \right.$$

- **1 pt : Cette IPP est valide car les fonctions** u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur le** `SEGMENT` $[0,1]$
- **1 pt : La v.a.r.** Z **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^*} k \ \mathbb{P}\big([Z = k] \big)$ **est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car cette série est à termes positifs.**
- **1 pt : La v.a.r.** Z **n'admet pas d'espérance**

b) Que vaut $\mathbb{E}(X_t)$ en fonction de t ? Si l'on note g cette fonction de t, que peut-on dire de $\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$?

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_t) = \dfrac{1}{t}$
- **1 pt : Supposons que l'espérance de** $g(Y)$ **existe. D'après la question** *3.b)* **(encore valable lorsque** Y **n'est plus discrète), on en déduit que** Z **admet une espérance. Or, on a montré que** Z **n'admet pas d'espérance à la question précédente. C'est absurde, donc** $\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$ **n'existe pas.**

5. *Un deuxième exemple.* On suppose que $J = [0, +\infty[$, que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.
Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z = k]\,) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\,\lambda\,\mathrm{e}^{-(\lambda+1)\,t}\,dt \;=\; \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

- **1 pt : la fonction f_Y est nulle en dehors de $[0, +\infty[$**
- **1 pt : la fonction f_k est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle**
- **1 pt : par thm de transfert, la v.a.r. $f_k(Y)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t)\,f_Y(t)\,dt$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car l'intégrande est positive**
- **3 pts : convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\,\lambda\,\mathrm{e}^{-(\lambda+1)\,t}\,dt$ (petit o, continuité, critère de Riemann)**
- **1 pt : changement de variable $\boxed{x = (\lambda+1)\,t}$.**
- **1 pt : Ce changement de variable est valide car $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{\lambda+1}\,x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$**

b) En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \;=\; 1$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

c) Déterminer la loi de Z. Reconnaître la loi de $Z + 1$.

- **1 pt : $\mathbb{P}(\,[Z = k]\,) = \dfrac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k$**
- **1 pt : $(Z + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$**
- **1 pt : $Z + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)$**

d) En déduire $\mathbb{E}(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'égalité (2) ?

- **1 pt : Z admet une espérance en tant que transformée affine de la v.a.r. $Z + 1$ qui admet elle-même une espérance**
- **1 pt : $\mathbb{E}(Z) \;=\; \dfrac{1}{\lambda}$**
- **1 pt : D'après l'énoncé, $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$. On en déduit que X_t admet une espérance et :**

$$\mathbb{E}(X_t) = t$$

Ainsi, $g : t \mapsto t$ et $g(Y) = Y$. Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors Y admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \frac{1}{\lambda}$$

on retrouve bien le résultat (2)

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

× tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;

× une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant éte infecté k jours plus tôt. Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.
Finalement, les réels α_0, α_1, ..., α_d sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in \,]0,1[$ et on note $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.
On utilise les notations et définitions de la **Partie 1** avec $J = \mathbb{R}_+$.
On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathbb{E}(R_n)$ et on pose $r_n = \mathbb{E}(R_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :
$$I_n \; = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k \, Z_{n-k} \qquad (*)$$
- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n \, I_n$, on a :
$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}\left(Y_n\right)$$
  où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

6. Donner une justification de $(*)$.

- **1 pt : définissons la contagiosité globale de la population le $n^{\text{ème}}$ jour comme la somme des contagiosités de tous les individus de la population encore contagieux ce jour-là Parmi les individus contagieux le jour n, il faut distinguer :**
- **1 pt : cas où $n \geqslant d$**
  × **ceux nouvellement infectés le jour n et ont donc pour coefficient de contagiosité α_0.**
  La contagiosité de cette catégorie de la population est la somme de toutes les contagiosités des individus qui composent cette population. Cette catégorie comportant Z_n individus, tous de contagiosité α_0, la contagiosité globale de cette catégorie est alors :
$$\alpha_0 \times Z_n$$
  × **ceux nouvellement infectés le jour $n-1$ et ont donc pour coefficient de contagiosité α_1.**
  Cette catégorie comportant Z_{n-1} individus, tous de contagiosité α_1, la contagiosité globale de cette catégorie est alors :
$$\alpha_1 \times Z_{n-1}$$

- × ...
- × **ceux nouvellement infectés le jour $n-d$ (sous l'hypothèse : $n-d \geqslant 0$) et ont donc pour coefficient de contagiosité α_{n-d}.**
  Cette catégorie comportant Z_{n-d} individus, tous de contagiosité α_d, la contagiosité globale de cette catégorie est alors :

$$\alpha_d \times Z_{n-d}$$

Les individus infectés un jour qui précède le jour $n-d$ ne sont plus contagieux et n'entrent donc pas dans la mesure de contagiosité.

- **1 pt : cas où $n < d$**

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(I_n)$ existe. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la **Partie** 1, montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n\, \mathbb{E}(I_n)$.

- **1 pt : la v.a.r. $Y_n = R_n\, I_n$ admet une espérance comme produit de v.a.r. indépendantes qui admettent chacune une espérance. De plus :**

$$\mathbb{E}(Y_n) \ = \ \mathbb{E}(R_n\, I_n) \ = \ \mathbb{E}(R_n) \times \mathbb{E}(I_n) \ = \ r_n \times \mathbb{E}(I_n)$$

- **1 pt : $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$ donc $\mathbb{E}(X_t) = t$ donc $g : t \mapsto t$**
- **1 pt : $g(Y_n) = Y_n$ admet une espérance donc il en est de même de Z_{n+1} (cf *3.b)*)**
- **1 pt : $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}\big(g(Y_n)\big) = \mathbb{E}(Y_n) = r_n\ \mathbb{E}(I_n)$**

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :

$$z_{n+1} \ = \ r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k\, z_{n-k} \qquad (3)$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité forte**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

8. *Programmation de z_n avec **Python**.*
On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.
On note Δ la matrice ligne $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_d \end{pmatrix}$.
Écrire une fonction **Python** d'entête `def z(Delta,n) :` qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ. Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `len(Delta)` qui donne le nombre d'éléments de `Delta`.

```
def z(Delta,n) :
    Z = np.zeros(n+1)
    Z[0] = 1
    d = len(Delta)-1
    for j in range(n) :
        S = 0
        m = min(j,d)
        for k in range(m+1) :
            S = S + Delta[k]*Z[j-k]
        Z[j+1] = ((j+2)/(j+1)) * S
    return Z[n]
```

- **1 pt : initialisation de** `Z`
- **1 pt :** `d = len(Delta)-1`
- **2 pts : calcul de la somme**

```
    for j in range(n) :
        S = 0
        m = min(j,d)
        for k in range(m+1) :
            S = S + Delta[k]*Z[j-k]
```

- **2 pts : fin de la fonction**

```
        Z[j+1] = ((j+2)/(j+1)) * S
    return Z[n]
```

9. Soient $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

- **1 pt : D'après la formule du crible :**

$$\mathbb{P}\big(U_n \cap V_n\big) \;=\; \mathbb{P}\big(U_n\big) + \mathbb{P}\big(V_n\big) - \mathbb{P}\big(U_n \cup V_n\big)$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(U_n\big) \leqslant \mathbb{P}\big(U_n \cup V_n\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\Omega\big)$
- **1 pt : par thm d'encadrement :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(U_n \cup V_n\big) = 1$

- On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

- **1 pt :** $B = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0] = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$
- **1 pt : thm de la limite monotone**
- **1 pt : la suite** $\big(A_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est une suite croissante d'événements**

b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir, pour tout $p \geqslant d$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

- **1 pt : cas** $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) = 0$
- **2 pts : cas** $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) \neq 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$

c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\,[Z_n = 0]\,) = 1$.

- **1 pt : montrons que** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) \;=\; 1 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([Z_n = 0]\right) \;=\; 1$
- **2 pts : ($\Rightarrow$) (1 point pour citer la croissance de $\mathbb{P}$)**
- **2 pts : ($\Leftarrow$) (1 point pour citer la question *9*)**

d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

- **1 pt : ($\Rightarrow$) On suppose :**

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\,[Z_n = j]\,\big) = \begin{cases} 1 & si\ j = 0 \\ 0 & si \\ & j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

En particulier, pour $j = 0$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\,[Z_n = 0]\,\big) \;=\; 1$**.**

- **2 pts : ($\Leftarrow$) On suppose :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\,[Z_n = 0]\,\big) \;=\; 1$**.**

On a, pour tout $j \geqslant 1$, $0 \;\leqslant\; \mathbb{P}\big(\,[Z_n = j]\big) \;\leqslant\; \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[Z_n = i]\,\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

11. ***a)*** Montrer, en utilisant un résultat de la **Partie 1**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z_{n+1} = 0]\,) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right)$$

- **1 pt : d'après la propriété (1),** $\mathbb{P}\big(\,[Z_{n+1} = 0]\,\big) \;=\; \mathbb{E}\big(f_0(Y_n)\big)$
- **1 pt : par définition :**

$$\begin{array}{rccl} f_0 & : & [0,+\infty[& \to \ \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto \ \mathbb{P}\big(\,[X_t = 0]\,\big) = \mathbf{e}^{-t}\,\dfrac{t^0}{0!} \;=\; \mathbf{e}^{-t} \end{array}$$

b) On suppose : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x reel, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$).

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}^{-x} \geqslant 1 - x$
- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{-Y_n}\right) \;\geqslant\; \mathbb{E}\big(1 - Y_n\big)$ **par croissance de l'espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(Y_n\big) = z_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **cf question *7.a)***
- **1 pt : thm d'encadrement**

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la **Partie 2** et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout réel x, on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x.
Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in\,]0,1[$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\,\alpha \leqslant \rho$.
On note (H_1) cette hypothèse.

a) Que vaut $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in \,]0,1[$ tel que $\theta^{d+1} \geqslant \rho \left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, \theta^{d-k} \right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

- **1 pt : La fonction $t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, t^{d-k}$ est donc une fonction polynomiale. On en déduit qu'elle est continue en 1**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{d} a_k\ t^{d-k} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, 1^{d-k} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k = 1$
- **1 pt : raisonnement par l'absurde**

- On pose $M = \max\limits_{k\in [\![N,N+d]\!]} \dfrac{z_k}{\theta^k}$.

b) Démontrer, pour tout $n \geqslant N$: $z_n \leqslant M\, \theta^n$.

- **1 pt : Si $n \in [\![N, N+d]\!]$, alors, par définition du maximum :**

$$\frac{z_n}{\theta^n} \leqslant \max_{k\in [\![N,N+d]\!]} \left(\frac{z_k}{\theta^k}\right) = M$$

  Comme $\theta^n \geqslant 0$, on obtient bien : $z_n \leqslant M\, \theta^n$.
- **3 pts : initialisation**
- **3 pts : hérédité forte**

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

- **1 pt : $z_n \geqslant 0$**
- **1 pt : $\theta \in \,]0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta^n = 0$**
- **1 pt : thm d'encadrement**

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\, \alpha \geqslant \rho$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions ***13.*** à ***16.*** , que **la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur** $\dfrac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.
  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

  avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

13. ***a)*** Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_d \end{pmatrix}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A\, U_n$.

- **1 pt :**

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-2} & a_{d-1} & a_d \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **1 pt : vérification dans le cas** $n < d$
- **1 pt : vérification dans le cas** $n \geqslant d$

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n\, U_0$ puis que $z_{n+1} = L\, A^n\, U_0$.

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} z_{n+1} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} a_0\, z_n + \cdots + a_d\, z_{n-d} \end{pmatrix} \ = \ L \times U_n \ = \ L \times A^n\, U_0$

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

- **1 pt :** $A \ = \ \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2 < 3$. **D'où :** $1 \in \mathrm{Sp}\, A$
- **1 pt :** $\mathrm{rg}\left(A + \frac{1}{2}\, I_3\right) < 3$. **D'où :** $-\dfrac{1}{2} \in \mathrm{Sp}\, A$
- **1 pt :** $\mathrm{rg}\left(A + \frac{1}{3}\, I_3\right) < 3$. **D'où :** $\dfrac{1}{3} \in \mathrm{Sp}\, A$
- **1 pt :** $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$**, elle admet donc au plus** 3 **valeurs propres distinctes**

b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal à 1.

- **1 pt :** $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$
- **1 pt : La famille** (V_1, V_2, V_3) **ainsi définie est une base de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1\, V_1 + s_2\, V_2 + s_3\, V_3$.

- **1 pt :** $U_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ z_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $U_0 = s_1\, V_1 + s_2\, V_2 + s_3\, V_3 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} s_1 & + & s_2 & + & s_3 & = & 1 \\ s_1 & - & 2\, s_2 & - & 3\, s_3 & = & 0 \\ s_1 & + & 4\, s_2 & + & 9\, s_3 & = & 0 \end{array} \right.$
- **1 pt :** $U_0 = \dfrac{1}{2} \cdot V_1 + V_2 - \dfrac{1}{2} \cdot V_3$

d) En déduire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s_1.

- **1 pt :** $U_n = A^n\, U_0 = A^n \left(\dfrac{1}{2}\ V_1 + V_2 - \dfrac{1}{2}\ V_3\right) = \dfrac{1}{2}\ A^n\, V_1 + A^n\, V_2 - \dfrac{1}{2}\ A^n\, V_3$
- **1 pt :** $U_n = \dfrac{1}{2}\ V_1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n V_2 - \dfrac{1}{2} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n V_3$

- **1 pt :** $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \in \left]-1,1\right[^2$

15. On revient au cas général.

a) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\,\lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

- **2 pts :**

$$\mathrm{rg}(A-\lambda\, I_{d+1}) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda^{d+1}+\lambda^d\,a_0+\lambda^{d-1}\,a_1+\cdots+\lambda\,a_{d-1}+a_d \end{pmatrix}\right)$$

- **2 pts :** $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda^d \\ \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- **1 pt : La famille** $\mathcal{F}_\lambda = \left(\begin{pmatrix} \lambda^d \\ \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est une base de** $E_\lambda(A)$

b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k} = 1$ **donc** 1 **est valeur propre de** A

- **1 pt :** $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$**, on obtient bien que la somme des composantes de ce vecteur vaut** $d+1$ **et** $V \in E_1(A)$

c) Établir que $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

- **1 pt : si** $\sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\,(-1)^k = (-1)^{d+1}$**, alors** $\left|\sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\,(-1)^k\right| = 1$**, c'est un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire**
- **1 pt : les** $a_{d-k}\,(-1)^k$ **sont de signes alternés, il ne peut pas y avoir cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire**
- **2 pts :** $\left|\sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\,\lambda^k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{d} \left|a_{d-k}\,\lambda^k\right| = \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\,|\lambda|^k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\,|\lambda|^d = |\lambda|^d < |\lambda|^{d+1}$

16. On pose pour tout $k \in [\![0,d]\!]$, $b_k = \sum\limits_{i=k}^{d} a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathscr{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum\limits_{k=0}^{d} b_k\, w_k = 0$.

a) Démontrer, pour tout $W \in H$: $A\,W \in H$.

- **1 pt :** $b_0 \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, w_k + \sum\limits_{k=1}^{d} b_k\, w_{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{d-1} (a_k + b_{k+1})\, w_k + a_d\, w_d$
- **1 pt :** $a_k + b_{k+1} \; = \; a_k + \sum\limits_{i=k+1}^{d} a_i \; = \; \sum\limits_{i=k}^{d} a_i \; = \; b_k$
- **1 pt :** $b_0 \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, w_k + \sum\limits_{k=1}^{d} b_k\, w_{k-1} = 0$

b) Déterminer l'unique réel s tel que : $U_0 - s\,V \in H$.

- **1 pt :** $U_0 - s\,V \; = \; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ \vdots \\ -s \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $U_0 - s\,V \in H \iff s = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{d} b_k}$

c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $L\,A^n\,W \to 0$ quand $n \to +\infty$.
En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = s$.

- **1 pt :** $z_{n+1} = L\,A^n\,U_0 = L\,A^n\,(U_0 - s\,V + s\,V) = L\,A^n\,(U_0 - s\,V) + s\,L\,A^n\,V$
- **1 pt : Par récurrence immédiate :** $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n\,V = V$
- **1 pt :** $L\,V \; = \; \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; = \; \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \; = \; 1$

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?

- **2 pts : Par critère de comparaison des séries à termes positifs, sous l'hypothèse** (H_1)**, la série** $\sum\limits_{n \geqslant 0} z_n$ **est convergente**
- **1 pt : sous l'hypothèse** (H_2)**, la série** $\sum\limits_{n \geqslant 0} z_n$ **est grossièrement divergente**
- **1 pt : sous l'hypothèse** (H_3)**, la série** $\sum\limits_{n \geqslant 0} z_n$ **est grossièrement divergente**
- **1 pt : sur les trois hypothèses étudiées, la contamination s'éteint en un nombre fini de jours seulement sous l'hypothèse** (H_1)