1 Disjonction de cas sur une variable libre

Lorsque l'on calcule une quantité qui dépend d'une *variable libre*, on peut séparer des cas selon les valeurs de cette variable libre. On écrit classiquement :

1^er^ cas :

2^e^ cas :

etc

Exemple 1. On définit la fonction $f : x \mapsto |2x-3|$. On souhaite donner, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression simple de $f(x)$ qui ne fait pas apparaître de valeur absolue.

On écrit : « soit $x \in \mathbb{R}$ ». Ceci permet de fixer la variable x, c'est donc une variable libre dans la suite de la rédaction.

1er cas : $x \geqslant \frac{3}{2}$.

Alors $2x-3 \geqslant 0$ et donc $f(x) = 2x-3$.

2e cas : $x < \frac{3}{2}$.

Alors $2x-3 < 0$ et donc $f(x) = -(2x-3) = -2x+3$.

Il n'y a pas d'autre possibilité pour x donc la disjonction de cas s'arrête ici.

A retenir :

> On doit s'assurer que l'on a bien traité tous les cas possibles lors d'une disjonction de cas.

2 Disjonction de cas sur une variable liée

On ne peut pas, à proprement parler, faire de disjonction de cas sur une *variable liée*. En effet, une variable liée est, par définition, dépendante d'un symbole (en général : une somme, un produit, une intégrale, une intersection ou une union) Une variable liée varie donc dans un ensemble déterminé et on ne peut rien y faire : impossible de faire une hypothèse supplémentaire dessus.

Exemple 2. Dans l'écriture $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, la variable t est liée au symbole d'intégration et varie dans l'ensemble $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. La quantité I **ne dépend pas** de t. On ne peut donc pas séparer les cas $t \geqslant 0$ et $t < 0$ puisque cela reviendrait en quelque sorte à changer l'intervalle dans lequel varie t et donc à changer l'intégrale.

A retenir

> Ecrire « 1er cas : $t \geqslant 0$ » est un non-sens dans ce contexte.

Une autre manière de comprendre ce fait est de se rappeler que l'on peut toujours renommer une variable liée. Quel sens y a-t-il à supposer que $t \geqslant 0$ lorsque l'on veut calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$? Aucun !

Cette clarification étant faite, il existe tout de même des situations où l'on souhaite séparer des cas portant sur une variable liée. Des outils adaptés à chaque situation existent.

2.1 Disjonction de cas sur une variable liée à une intégrale

L'outil adapté est la **relation de Chasles**.

Exemple 3. On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$. On écrit

$$I = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2.2 Disjonction de cas sur une variable liée à une somme

L'outil adapté est ici aussi la **relation de Chasles** ou plus généralement le « découpage de somme ».

Exemple 4. Soit N une matrice telle que $N^2 = 0$ (et donc, pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$).

Soit $n \geqslant 1$. On souhaite calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} N^k$. On écrit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} N^k = \sum_{k=0}^{1} N^k + \sum_{k=2}^{n} N^k = \sum_{k=0}^{1} N^k = I + N$$

Exemple 5. Soit $n \geqslant 1$. On souhaite calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n} k(-1)^k$. On écrit

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{2n} k(-1)^k \\
&= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} k(-1)^k + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} k(-1)^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} (2j)(-1)^{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1)(-1)^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (2j) - \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) && (\text{car } (-1)^{2j+1} = -1) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (2j) - \sum_{j=0}^{n-1} (2j) - \sum_{j=0}^{n-1} 1 \\
&= 2n - n \\
&= n
\end{aligned}$$

2.3 Disjonction de cas lors du calcul d'une probabilité

Il existe beaucoup de situations probabilistes où le calcul d'une probabilité nous apparaît évident lorsqu'on a une information supplémentaire. L'outil adapté à la disjonction de cas dans ce contexte est la **formule des probabilités totales**.

Exemple 6. Soit $n \geqslant 1$. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

On souhaite calculer $\mathbb{P}([X = Y])$.

Si l'on connaît la valeur prise par Y, disons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est très facile, car $\mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$. On ne peut cependant pas calculer la probabilité en séparant ces cas (on calculerait en réalité $\mathbb{P}_{[Y=k]}([X = Y])$ si on faisait cela).

Pour faire convenablement le calcul, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = Y]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = Y] \cap [Y = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k])\mathbb{P}([Y = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} && (\text{car } k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Exemple 7. On dispose d'un dé équilibré et d'un dé truqué qui tombe toujours sur 6. On choisit un dé au hasard (de manière équiprobable), puis on le lance et on note le numéro obtenu. On note A l'événement : « le dé tombe sur 6 ».

Si on sait quel dé on lance, la probabilité que le dé tombe sur 6 est très facile à obtenir. Ainsi, on se dit que le calcul à effectuer « dépend » du dé lancer. On doit donc appliquer la formule des probabilités totales.

Notons T l'événement : « le dé est truqué ». La famille $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(A) + \mathbb{P}(\overline{T})\mathbb{P}_{\overline{T}}(A)\\ &= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\\ &= \frac{7}{12}\end{aligned}$$