DS8 barème (version A)

Exercice 1 (EML 2010)

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. *a)* Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

- **1 pt : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé**
- **1 pt :** $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f.

- **1 pt :**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

(les limites n'étaient pas attendues dans cette question)

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

- **1 pt : f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ car de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé**
- **1 pt :** $f''(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$

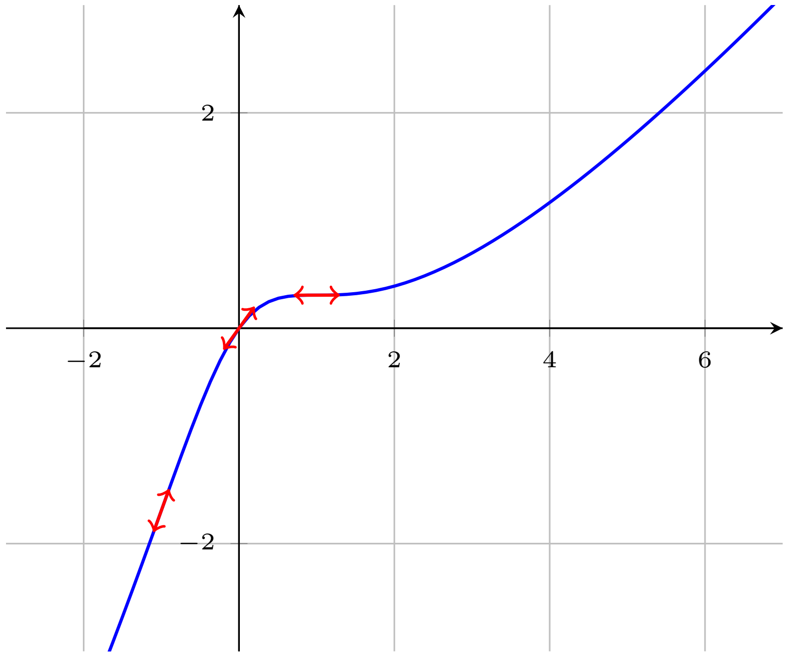
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(le mot « croissances comparées » doit apparaître)**

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

- **1 pt : f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1**
- **1 pt : La courbe représentative de f admet deux points d'inflexion :** $(-1, -1 - \ln(2))$ **et** $(1, 1 - \ln(2))$

4. Tracer $\mathcal{C}$. On précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.



- **1 pt : Au point $(0, f(0))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :**

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$

- **1 pt : Au point $(-1, f(-1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :**

$$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) = (-1 - \ln(2)) + 2\ (x + 1) = 2x + (1 - \ln(2))$$

- **1 pt : Au point $(1, f(1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :**

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 - \ln(2)$$

(comme $f'(1) = 0$, on obtient une tangente horizontale)

- **1 pt : monotonie, concavité et convexité respectées**
- **1 pt : limites respectées**

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$$

5. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de F en (x, y), à l'aide de f', x et y.

- **1 pt : $F_1 : (x, y) \mapsto f(x + y)$ est de la forme $f \circ g$ où**
  - × **f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
  - × **$g : (x, y) \mapsto x + y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale**

  donc F_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
  (raisonnement analogue pour les autres fonctions accepté)
- **1 pt : $\partial_1(F)(x, y) = f'(x + y) - f'(x)$ et $\partial_2(F)(x, y) = f'(x + y) - f'(y)$**

6. a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \iff \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = f'(y) \\ f'(x + y) = f'(x) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x(1 + y^2) = y(1 + x^2) \\ (x + y)(1 + x^2) = x(1 + (x + y)^2) \end{array} \right.$$

- **1 pt :** $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{cases}$
- **2pts :** $\begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{cases} \iff \begin{cases} x(1+y^2) = y(1+x^2) \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases}$

b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Compléter la formule suivante : $x + xy^2 - y - yx^2 = (x-y)(\dots)$.

- **1 pt :** $x + xy^2 - y - yx^2 = (x-y)(1-xy)$

c) En déduire que F possède exactement trois points critiques : $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

- **1 pt :** $\begin{cases} x(1+y^2) &= y(1+x^2) \\ (x+y)(1+x^2) &= x(1+(x+y)^2) \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(1-xy) &= 0 \\ (x+y)(1+x^2) &= x(1+(x+y)^2) \end{cases}$
- **1 pt :**

$$\begin{cases} (x-y)(1-xy) &= 0 \\ (x+y)(1+x^2) &= x(1+(x+y)^2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x-y &= 0 \\ (x+y)(1+x^2) &= x(1+(x+y)^2) \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} 1-xy &= 0 \\ (x+y)(1+x^2) &= x(1+(x+y)^2) \end{cases}$$

- **1 pt :** $\begin{cases} x-y &= 0 \\ (x+y)(1+x^2) &= x(1+(x+y)^2) \end{cases} \iff \begin{cases} y &= x \\ x\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right) &= 0 \end{cases}$
- **1 pt :** $\begin{cases} 1-xy &= 0 \\ (x+y)(1+x^2) &= x(1+(x+y)^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \quad \textbf{et} \quad y \neq 0 \\ y = \frac{1}{x} \\ (x+\frac{1}{x})(1+x^2) = x(1+(x+\frac{1}{x})^2) \end{cases}$
- **1 pt :** $\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+x^2) = x\left(1+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right) \iff x = 0$

7. a) Calculer les dérivées partielles secondes de F.

- **1 pt : F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, par un raisonnement identique à celui mené en question *5***
- **1 pt :** $\partial^2_{1,1}(F)(x,y) = f''(x+y) - f''(x)$ **et** $\partial^2_{2,2}(F)(x,y) = f''(x+y) - f''(y)$
- **1 pt :** $\partial^2_{2,1}(F)(x,y) = f''(x+y)$ **et** $\partial^2_{1,2}(F)(x,y) = f''(x+y)$

b) Est-ce que F admet un extremum local en $(0,0)$?

- **1 pt :** $\nabla^2(F)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(\nabla^2(F)(0,0)) = \{-2, 2\}$
- **1 pt : les deux valeurs propres de $\nabla^2(F)(0,0)$ sont non nulles et de signes opposés, donc $(0,0)$ est un point selle. F n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.**

c) Montrer que F admet un extremum local en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Préciser sa nature.

- **1 pt :** $\nabla^2(F)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3^2} + \frac{2^4}{5^2} & \frac{2}{3^2} \\ \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^2} + \frac{2^4}{5^2} \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(\nabla^2(F)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})) = \{\frac{2^4}{5^2}, \frac{4}{3^2} + \frac{2^4}{5^2}\}$
- **1 pt : les deux valeurs propres de $\nabla^2(F)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ sont strictement positives, donc $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ est un minimum local.**

d) En déduire la nature du point critique $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

- **1 pt : Comme tous les termes sont au carré, on a la même matrice hessienne en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Ainsi, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ est un minimum local.**

Exercice 2 (ECRICOME 2020)

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) \;=\; \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n}\;dt$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)\,a^{n-1}}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_a^B \frac{1}{t^n}\;dt \;=\; \int_a^B t^{-n}\;dt \;=\; \left[\frac{1}{-n+1}\;t^{-n+1}\right]_a^B \;=\; \frac{1}{-n+1}\left(\frac{1}{B^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}}\right)$
- **1 pt : comme** $n-1>0$ **:** $\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{B^{n-1}}=0$**.**

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3\,a^3}{t^4} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$$

a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

- **1 pt : La fonction** f **est continue sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** a
- **1 pt :** $\forall t\in\mathbb{R}$**,** $f(t)\geqslant 0$
- **1 pt :** f **est nulle en dehors de** $[a,+\infty[$ **:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\;dt \;=\; \int_a^{+\infty} f(t)\;dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\;dt \;=\; \int_a^{+\infty}\frac{3\,a^3}{t^4}\;dt \;=\; 3a^3\;I_4(a) \;=\; \cancel{3a^3}\;\frac{1}{\cancel{3a^3}} \;=\; 1$
(la question précédente doit être citée avec $n=4$***)***

b) Donner la fonction de répartition de X.

- **1 pt : Dans la suite, on considère :** $X(\Omega)=[a,+\infty[$
- **1 pt : si** $x\in\,]-\infty,a[$ **:** $F_X(x) \;=\; \mathbb{P}(\,[X\leqslant x]\,) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$
- **1 pt : si** $x\in[a,+\infty[$ **:** $F_X(x)=1-\dfrac{a^3}{x^3}$

c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

- **1 pt : La v.a.r.** X **admet une espérance si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\;dt$ **est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\,f(t)\;dt$**.**
- **1 pt : question *1* citée avec** $n=3$ **donc l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\;dt$ **converge**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X)=\dfrac{3}{2}\;a$

d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3\,a^2}{4}$.

- **1 pt : La v.a.r.** X **admet une variance si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$ **est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f(t)\ dt$**.**
- **1 pt : question *1* citée avec** $n = 2$ **donc l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$ **converge**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X^2) \ = \ \displaystyle\int_{a}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt \ = \ 3a^3\ I_2(a) \ = \ 3a^3\ \frac{1}{a} \ = \ 3\,a^2$
- **1 pt : formule de Koenig-Huygens citée pour conclure :** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{3}{4}\ a^2$

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

- **1 pt : Notons** $h : x \mapsto \dfrac{a}{x^{\frac{1}{3}}}$**, de sorte que** $Y = h(U)$
- **1 pt :** $Y(\Omega) = h(]0,1]) = [h(1), \lim\limits_{x\to 0}\ h(x)[= [a, +\infty[$

b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

- **1 pt : si** $x \in]-\infty, a[$ **:** $F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}(\,[Y \leqslant x]\,) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$
- **1 pt : si** $x \in [a, +\infty[$ **:** $F_Y(x) = 1 - F_U\left(\left(\dfrac{a}{x}\right)^3\right)$
- **1 pt : argument** U **est une v.a.r. à densité**
- **1 pt : argument** $a > 0$
- **1 pt :** $0 \leqslant \left(\dfrac{a}{x}\right)^3 \leqslant 1$
- **1 pt :** $F_U\left(\left(\dfrac{a}{x}\right)^3\right) = \left(\dfrac{a}{x}\right)^3 = \dfrac{a^3}{x^3}$ **donc** $F_Y(x) = 1 - \dfrac{a^3}{x^3}$
- **1 pt : la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. . On en déduit que les v.a.r.** X **et** Y **ont même loi**

c) Écrire une fonction **Python** nommée `simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante. On rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction `rd.random([m,n])` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $[0,1[$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

- **1 pt :** `U = rd.random([m,n])`
- **1 pt :** `return a / (U**(1/3))`

```
def simulX(a,m,n):
    U = rd.random([m,n])
    return a / (U**(1/3))
```

ou, encore plus court,

```
def simulX(a,m,n):
    return a / (rd.random([m,n])**(1/3))
```

4. *a)* Calculer $\mathbb{P}(\,[X > 2a]\,)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X > 2a]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant 2a]) = 1 - F_X(2a)$
- **1 pt :** $2a \geqslant a$ **donc** $\mathbb{P}([X > 2a]) = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \dfrac{a^3}{(2a)^3}\right) = \dfrac{\cancel{a^3}}{8\,\cancel{a^3}} = \dfrac{1}{8}$

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X>2a]}([X > 6a])$.

- **1 pt : comme** $6a \geqslant 2a$ **:** $[X > 6a] \subset [X > 2a]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X > 6a]) = 1 - F_X(6a) = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \dfrac{a^3}{(6a)^3}\right) = \dfrac{\cancel{a^3}}{6^3\,\cancel{a^3}} = \dfrac{1}{6^3}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X>2a]}([X > 6a]) = \dfrac{1}{27}$

c) On suppose que la fonction **Python** de la question ***3.c)*** a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a, 1, N)[0]
for k in range(N):
    if  X[k] > 2*a  :
        s1 = s1 + 1
        if X[k] > 6*a:
              s2 = s2 + 1
if s1 > 0:
    print( s2/s1 )
```

- **1 pt :** `X[k] > 2*a`
- **1 pt :** `s2 = s2 + 1`
- **1 pt :** `s2/s1`
- **1 pt : point de bonification si tout est juste**

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
On dit qu'un estimateur T_n de a est *sans biais* si $\mathbb{E}(T_n) = a$.
Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose : $V_n = \dfrac{2}{3n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a.

- **1 pt :** V_n **est bien un estimateur de** a
- **1 pt : La v.a.r.** V_n **admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(V_n) = a$
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

b) Montrer que $\mathbb{V}(V_n) = \dfrac{a^2}{3n}$.

- **1 pt : La v.a.r.** V_n **admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**

- **1 pt :** $\mathbb{V}(V_n) = \dfrac{a^2}{3n}$
- **1 pt : par indépendance**

6. On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

- **1 pt :** $W_n(\Omega) \subset [a, +\infty[$
- **1 pt : si** $x \in \,]-\infty, a[$ **:** $F_{W_n}(x) \; = \; \mathbb{P}(\,[W_n \leqslant x]\,) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$
- **1 pt : si** $x \in [a, +\infty[$ **:** $F_{W_n}(x) = 1 - \dfrac{a^{3n}}{x^{3n}}$
- **1 pt : par indépendance des** X_k
- **1 pt : La fonction** F_{W_n} **est continue sur** $\mathbb{R}$**.**
- **1 pt : La fonction** F_{W_n} **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** a**.**

b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\[2mm] \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$$

- **1 pt : Pour déterminer une densité** f_n **de** W_n**, on dérive sa fonction de répartition** F_{W_n} **sur les intervalles ouverts** $]-\infty, a[$ **et** $]a, +\infty[$ **où** F_{W_n} **est de classe** $\mathcal{C}^1$
- **1 pt : On choisit enfin :** $f_n(a) = \dfrac{3na^{3a}}{a^{3n+1}}$

c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a.

- **1 pt : La v.a.r.** W_n **admet une espérance si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$ **est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, f_n(t)\ dt$
- **1 pt : d'après la question** ***1.*** **appliquée à** $3n \geqslant 2$ **(car** $n \geqslant 1$**)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(W_n) = \dfrac{3n}{3n-1}\ a$
- **1 pt : On pose alors** $\lambda_n = \dfrac{3n-1}{3n}$
- **1 pt : par linéarité de l'espérance**

d) Montrer que $\mathbb{V}(\lambda_n W_n) = \dfrac{a^2}{3n\,(3n-2)}$.

- **1 pt : La v.a.r.** W_n **admet une variance si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_n(t)\ dt$ **est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment du type** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, f_n(t)\ dt$
- **1 pt : d'après la question** ***1.*** **appliquée à** $3n-1 \geqslant 2$ **(car** $n \geqslant 1$**)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(W_n^2) \; = \; \displaystyle\int_a^{+\infty} t^2\, f_n(t)\ dt \; = \; 3n\, a^{3n}\, I_{3n-1}(a) \; = \; 3n\, a^{3n}\, \dfrac{1}{(3n-2)\, a^{3n-2}} \; = \; \dfrac{3n}{3n-2}\, a^2$

- **1 pt :** $\mathbb{V}(W_n) = \dfrac{3n}{(3n-2)\,(3n-1)^2}\ a^2$
- **1 pt : La v.a.r. $\lambda_n\, W_n$ admet une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. W_n qui en admet une.**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(\lambda_n\, W_n) = \dfrac{a^2}{3n\,(3n-2)}$

7. Comparer les variances des estimateurs V_n et $\lambda_n W_n$. Quel est le meilleur estimateur selon vous ?

- **1 pt : pour tout $n \geqslant 1$, $3n-2 \geqslant 1$ et donc $\mathbb{V}(\lambda_n\, W_n) \leqslant \mathbb{V}(V_n)$**
- **1 pt : $\lambda_n\, W_n$ est un meilleur estimateur que V_n car il prend des valeurs plus proches de a que V_n en moyenne**

8. On rappelle que si `A` est un tableau (ou un vecteur ligne) **Python**, l'instruction `sum(A)` renvoie la somme des coefficients du tableau `A`.

a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'un tableau à m éléments :

```
def simulV(a,m,n):
    X = simulX(a,m,n)
    V = np.zeros(m)
    for k in  range(m)  :
        V[k] =  (2/(3*n))*sum(X[k])
    return V
```

- **1 pt :** `range(m)`
- **1 pt :** `(2/(3*n))*sum(X[k])`

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n\, W_n$.

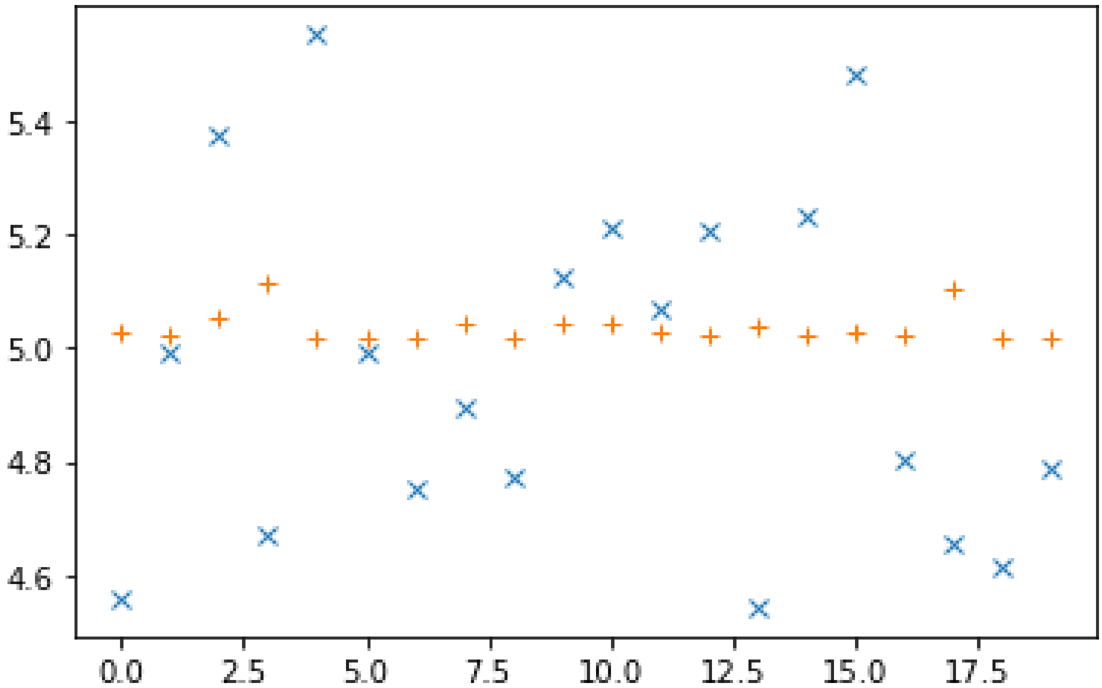
b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
V = simulV(..., ..., ...)
W = simulW(..., ..., ...)
plt.plot(..., 'x')
plt.plot(..., '+')
```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes à l'aide de la question 7.

```
V = simulV(5,20,100)
W = simulW(5,20,100)
plt.plot(V, 'x')
plt.plot(W, '+')
```

- **1 pt :** `V = simulV(5,20,100)`
- **1 pt :** `W = simulW(5,20,100)`
- **1 pt :** `plt.plot(V, 'x')`
- **1 pt :** `plt.plot(W, '+')`
- **1 pt : d'après la question 7, l'estimateur $\lambda_n\, W_n$ est meilleur que l'estimateur V_n, donc le vecteur `W` (contenant des simulations de $\lambda_n\, W_n$) est représenté par les croix droites, et le vecteur `V` (contenant des simulations de V_n) est représenté par les croix obliques**



Problème (EDHEC 2017)

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

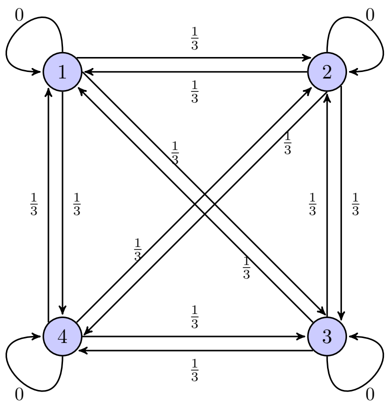
Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Représenter le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.

- **2 pts :**



2. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.

- **1 pt : À l'instant** 0**, le mobile se trouve sur le sommet** 1**. Il peut alors se déplacer sur les sommets** 2**,** 3 **et** 4**.** $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$
- **1 pt : ce choix se fait de manière équiprobable, donc** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦2, 4⟧)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1) = 3$

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}([X_2 = 4]) = \frac{2}{9}$$

3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

- **1 pt : les** 4 **sommets sont atteignables à l'instant** 2 **et qu'il en est donc de même aux instants suivants**
- **1 pt :** $X_n(\Omega) = ⟦1, 4⟧$

4. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$$

- **1 pt : D'après la question précédente,** $X_n(\Omega) = ⟦1, 4⟧$ **donc** $\Big([X_n = k]\Big)_{k \in ⟦1,4⟧}$ **est un système complet d'événements.**
- **1 pt : d'après l'énoncé, pour tout** $k \in ⟦1, 4⟧$ **:**

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} \textbf{ si } k \neq 1 \qquad \textbf{et} \qquad \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = 0$$

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- **2 pts : Si** $n = 0$ **: d'après l'énoncé, le mobile se trouve en position** 1 **à l'instant** 0**. Ainsi :**

$$\mathbb{P}([X_0 = 1]) = 1 \qquad \textbf{et} \qquad \mathbb{P}([X_0 = 2]) = \mathbb{P}([X_0 = 3]) = \mathbb{P}([X_0 = 4]) = 0$$

Ainsi : $\sum\limits_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) = 0$**.**
Comme le mobile se déplace, il ne peut se trouver en position 1 **à l'instant** 1 **:** $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = 0$**.**

$$\boxed{\textbf{La relation est vérifiée pour } n = 0.}$$

- **1 pt : d'après l'énoncé,** $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}$**.**

Or, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦2, 4⟧)$ **donc** $\sum\limits_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X_n = k]) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$**.**

On a bien $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$

$$\boxed{\textbf{La relation est vérifiée pour } n = 1.}$$

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3}\,\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}$$

- **1 pt : La famille $\Big([X_n = k]\Big)_{k\in[\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements (qui contient éventuellement $\varnothing$ pour les cas $n = 0$ et $n = 1$). On en déduit :**

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 1]) + \dfrac{1}{3}$

d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

5. *a)* En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{3}\ \left(\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4])\right)$$

- **1 pt : cas $n \geqslant 1$**
- **1 pt : cas $n = 0$**

b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

- **2 pts :** $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = -\dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 2]) + \dfrac{1}{3}$

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 2]) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

6. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 3]) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4]) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}([X_n = 4]) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

- **1 pt : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \mathbb{P}([X_n = 3])$ et $t_n = \mathbb{P}([X_n = 4])$.**
  Les suites (s_n) et (t_n) vérifient la même relation de récurrence que la suite (r_n).
  De plus, on a : $r_0 = s_0 = t_0 = 0$.

7. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

- **1 pt : La v.a.r. X_n est finie. Elle admet donc une espérance.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{4} k \times \mathbb{P}([X_n = k])$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

8. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on reconnaîtra la loi. En déduire un état stable de la chaîne de Markov.

- **1 pt : Comme $\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$, il vient que** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$
- **1 pt : pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{1}{4}$**, donc (X_n) converge en loi vers $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 4]\!])$**
- **1 pt : $\pi = \left(\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4}\right)$ est un état stable de la chaîne de Markov**

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \big(\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \mathbb{P}([X_n = 3]) \quad \mathbb{P}([X_n = 4])\big)$$

9. ***a)*** Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$$

- **1 pt : Le coefficient de la première colonne est :**

$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$

  D'après la question *3.a)*, ce coefficient est : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1])$
- **1 pt : idem pour les autres coefficients**

b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\ A^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

c) En déduire la première ligne de A^n.

- **1 pt :** $U_0 = (\mathbb{P}([X_0 = 1]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 3]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 4])) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ **donc** $U_0 A^n$ **est la première ligne de** A^n
- **1 pt : La première ligne de** A^n **est** $U_n = (\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \mathbb{P}([X_n = 3]) \quad \mathbb{P}([X_n = 4]))$**,**
  à savoir : $\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \quad \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \quad \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \quad \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

d) Compléter le script suivant pour qu'il affiche le n^{e} état de la chaîne de Markov en utilisant la matrice A. On pourra utiliser les fonctions `al.matrix_power` et `np.dot`.

```
n = int(input('Rentrez la valeur de n :'))
A = (1/3) * np.array([[0,1,1,1], [1,0,1,1], [1,1,0,1], [1,1,1,0]])
U = np.array([1,0,0,0])
print(np.dot(U,al.matrix_power(A,n)))
```

- **1 pt :** `A = (1/3) * np.array([[0,1,1,1], [1,0,1,1], [1,1,0,1], [1,1,1,0]])`
- **1 pt :** `U = np.array([1,0,0,0])`
- **1 pt :** `print(np.dot(U,al.matrix_power(A,n)))`

10. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

- **1 pt : En plaçant le mobile initialement en position** 2**, la multiplication** $U_0\ A^n$ **permet de récupérer la deuxième ligne de** A^n
- **1 pt : La deuxième ligne de** A^n **est :**
  $\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \quad \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \quad \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \quad \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

- **1 pt : La troisième ligne de A^n est :**
$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$
et la quatrième ligne de A^n est :
$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

- **1 pt :** $A = -\frac{1}{3}\ I + \frac{1}{3}\ J$ **ou** ($a = -\frac{1}{3}$ **et** $b = \frac{1}{3}$)

12. ***a)*** Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

- **1 pt :** $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot J$
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

- **1 pt : I et J commutent**
- **1 pt : formule du binôme correcte**
- **1 pt : découpage valable car $n \geqslant 0$**
- **1 pt :** $I^{n-k}\ J^k = I\ J^k = J^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^k = (-1+4)^n - (-1)^n \ = \ 3^n - (-1)^n$
- **2 pts :** $A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n\ I + \frac{1}{4}\ \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\ J$

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

- **1 pt : *(aucun point en cas d'erreur de logique)***

Partie 4 : informatique

13. ***a)*** Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle :

- prenne en argument la position `x` à un instant donné
- renvoie la position du mobile à l'instant suivant

On rappelle que `rd.randint(a,b)` simule un tirage uniforme dans $[\![a, b-1]\!]$.

```
def EtapeMarkov(x):
L = [1,2,3,4]
L.pop(x-1) # supprime le sommet x de la liste
i = rd.randint(0,3)
return L[i]
```

- **1 pt :** `i = rd.randint(0,3)`

b) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements.

```
chaine = []
x = 1 # point de départ
for k in range(100):
    x = EtapeMarkov(x)
    chaine.append(x)
print(chaine)
cpt = 0
for k in range(100):
    if chaine[k] == 1 :
        cpt = cpt+1
print(cpt)
```

- **1 pt :** `x = 1 # point de départ`
- **1 pt :** `x = EtapeMarkov(x)`
- **1 pt :** `if chaine[k] == 1:`
- **1 pt :** `cpt = cpt+1`
- **1 pt : point de bonification si tout est juste**

c) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$, $n = 26$.
En quoi est-ce normal ?

- **1 pt : à chaque étape (hormis la $1^{\text{ère}}$), le mobile a environ 1 chance sur 4 de se retrouver en position 1. Donc en 99 étapes, il est passé par la position 1 environ** $99 \times \dfrac{1}{4} \simeq 25$ **fois**