

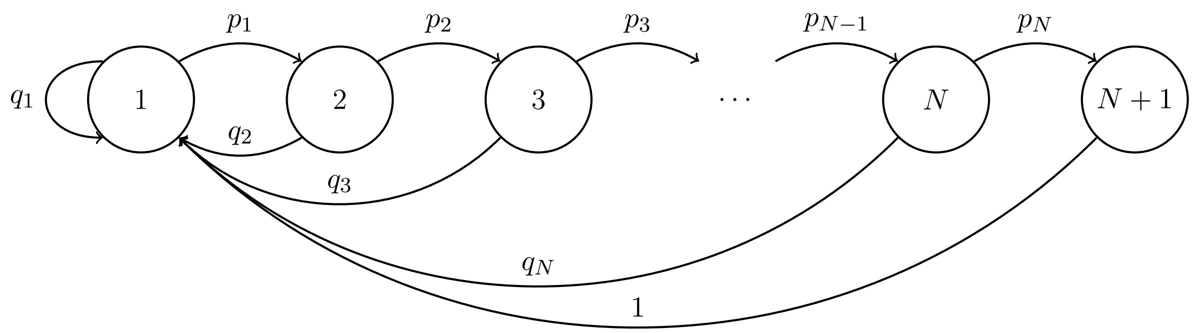
DS8 correction (version B)

Problème 1 (`sujet maison`)

Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
On considère un joueur (ou une joueuse) qui joue à un *rogue-like*. Le rogue-like est un sous-genre de jeu vidéo dans lequel le joueur explore un donjon infesté de monstres qu'il doit combattre pour progresser vers la dernière salle, contenant le *boss final* et la promesse de récompenses épiques [(1)]. Une des caractéristiques du rogue-like est que toute mort est définitive, ce qui oblige le joueur à recommencer du début s'il souhaite continuer à jouer. Nous considérons dans la suite un joueur soumis aux règles suivantes :

- Le joueur commence au *niveau* 1 et a pour objectif d'atteindre le niveau $N+1$ afin d'y affronter le boss final et de le vaincre.
- A chaque niveau, le joueur effectue un unique *combat* qu'il peut soit gagner soit perdre.
  Plus précisément :
  - × pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on note $p_i \in]0,1[$ la probabilité que le joueur gagne le combat effectué au niveau i, et on pose $q_i = 1 - p_i$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, $p_i \geqslant p_{i+1}$.
  - × si le combat mené au niveau $i \in [\![1, N]\!]$ est gagné, le joueur passe au niveau supérieur, sinon, le joueur meurt et retourne au niveau 1.
  - × quelque soit l'issue du combat effectué au niveau $N+1$, le joueur recommence au niveau 1 ensuite.
- On appelle *partie* toute séquence minimale de jeu commençant au niveau 1 et se terminant soit par la mort du joueur, soit par la victoire du joueur contre le boss final.
- Le joueur enchaîne indéfiniment les parties, même en cas de victoire contre le boss final.

On représente cette chaîne de Markov à $N+1$ états par le graphe probabiliste :



On admet que toutes les v.a.r. sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au numéro du niveau où se trouve le joueur lors de son n^{e} **combat**. En particulier, $X_1 = 1$.
- pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, Y_j la variable aléatoire égale au niveau maximal atteint lors de la j^{e} **partie** jouée.
- Z la variable aléatoire égale au numéro de la **partie** où le joueur combat le boss final pour la 1^{re} fois.
- T la variable aléatoire égale au numéro du premier **combat** effectué contre le boss final.

L'objectif principal du problème est de calculer $\mathbb{E}(T)$.
Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La partie **III** utilise les résultats de la partie **II**.

(1). Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Roguelike

Question préliminaire. Donner une interprétation de l'hypothèse : pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, $p_i \geqslant p_{i+1}$.

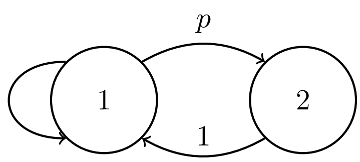
Démonstration. Cette hypothèse traduit le fait que la difficulté des combats augmente à chaque niveau. □

Partie I : le cas $N = 1$

On pose pour simplifier $p = p_1$ et $q = 1 - p$.

1. Dessiner le graphe probabiliste dans ce contexte et avec ces notations.

Démonstration. Le graphe probabiliste se simplifie en :



□

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{n+1} = 1 - p\alpha_n$.

Démonstration.

- On remarque que $X_1(\Omega) = \{1\}$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $X_n(\Omega) = \{1, 2\}$.
- Soit $n \geqslant 2$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = 1], [X_n = 2])$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) \\
&= \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [X_n = 2]) \\
&= \mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2])\mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1]) \\
&= q\mathbb{P}([X_n = 1]) + 1 \times \mathbb{P}([X_n = 2]) \\
&= q\alpha_n + (1 - \alpha_n) \\
&= (1-p)\alpha_n + 1 - \alpha_n \\
&= 1 - p\alpha_n
\end{aligned}$$

- De plus, $\alpha_1 = 1$ puisque $X_1 = 1$ (le joueur commence au niveau 1) et

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \mathbb{P}([X_2 = 1]) \\
&= \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) \\
&= q \\
&= 1 - p \\
&= 1 - p\alpha_1
\end{aligned}$$

donc la formule reste valable pour $n = 1$.

□

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{1 - (-p)^n}{1 + p}$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $\alpha_n = \dfrac{1-(-p)^n}{1+p}$ »

<u>Initialisation :</u>

D'une part, $\alpha_1 = 1$.

D'autre part, $\dfrac{1-(-p)^1}{1+p} = \dfrac{1-(-p)}{1+p} = \dfrac{1+p}{1+p} = 1$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= 1 - p\alpha_n && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 1 - p\frac{1-(-p)^n}{1+p} && \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= 1 - \frac{p - p(-p)^n}{1+p} \\
&= 1 - \frac{p + (-p)^{n+1}}{1+p} \\
&= \frac{1 + p - p - (-p)^{n+1}}{1+p} \\
&= \frac{1-(-p)^{n+1}}{1+p}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Commentaire

La suite (α_n) est arithmético-géométrique. On aurait pu ainsi mettre en oeuvre la méthode du cours si la formule n'était pas donnée dans l'énoncé.

□

3. a) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une v.a.r. X dont on explicitera la loi.

Démonstration.

- $p \in]0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-p)^{n+1} = 0$.
- On en déduit, puisque $([X_n = 1], [X_n = 2])$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) = \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+p}$$

$$\mathbb{P}([X_n = 2]) = 1 - \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{1+p} = \frac{p}{1+p}$$

Donc (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X de loi :

× $X(\Omega) = \{1, 2\}$

× $\mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{1}{1+p}$ et $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{p}{1+p}$

□

b) En déduire un état stable de la chaîne de Markov (X_n).

Démonstration. On en déduit que $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+p} & \dfrac{p}{1+p} \end{pmatrix}$ est un état stable de la chaîne de Markov. □

4. a) Reconnaître, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $X_n - 1$.

Démonstration.

- Pour $n = 1$, X_1 est la variable aléatoire constante égale à 1, donc $X_1 - 1$ est la variable aléatoire constante égale à 0. Ainsi, $X_1 - 1$ suit la loi certaine égale à 0.
- Pour $n \geqslant 2$, on remarque tout d'abord que $(X_n - 1)(\Omega) = \{0, 1\}$, donc $X_n - 1$ suit une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n - 1 = 1]) &= \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ &= 1 - \alpha_n \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{X_n - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - \alpha_n)}$$

□

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X_n - 1)(X_{n+1} - 1) = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \Omega$.

- Premier cas : $X_n(\omega) = 1$.
  Alors $(X_n(\omega) - 1)(X_{n+1}(\omega) - 1) = 0 \times (X_{n+1}(\omega) - 1) = 0$.
- Deuxième cas : $X_n(\omega) = 2$.
  Alors c'est que le joueur combat le boss final au n^{e} combat. Il doit donc nécessairement retourner au niveau 1 au prochain combat, d'où : $X_{n+1}(\omega) = 1$.
  Il vient alors $(X_n(\omega) - 1)(X_{n+1}(\omega) - 1) = (X_n(\omega) - 1) \times 0 = 0$.

□

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) = -\dfrac{(p + (-p)^n)(p + (-p)^{n+1})}{(1+p)^2}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_n - 1, X_{n+1} - 1) &= \mathbb{E}((X_n - 1)(X_{n+1} - 1)) - \mathbb{E}(X_n - 1)\mathbb{E}(X_{n+1} - 1) \\ &= -\mathbb{E}(X_n - 1)\mathbb{E}(X_{n+1} - 1) \\ &= -(1 - \alpha_n)(1 - \alpha_{n+1}) \qquad \textit{(valable pour } n = 1\textit{)} \\ &= -\left(1 - \frac{1 - (-p)^n}{1+p}\right)\left(1 - \frac{1 - (-p)^{n+1}}{1+p}\right) \\ &= -\left(\frac{p + (-p)^n}{1+p}\right)\left(\frac{p + (-p)^{n+1}}{1+p}\right) \\ &= -\frac{(p + (-p)^n)(p + (-p)^{n+1})}{(1+p)^2} \end{aligned}$$

- D'autre part, par bilinéarité de la covariance :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_n - 1, X_{n+1} - 1) &= \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) - \mathrm{Cov}(1, X_{n+1}) - \mathrm{Cov}(X_n, 1) + \mathrm{Cov}(1,1) \\ &= \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})\end{aligned}$$

En effet, pour toute variable aléatoire U et tout réel a, on a $\mathrm{Cov}(U, a) = 0$.

D'où

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) = -\frac{(p + (-p)^n)(p + (-p)^{n+1})}{(1+p)^2}.}$$

□

d) Pour quelle(s) valeur(s) de n les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, si $n \geqslant 2$, $\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) \neq 0$. En effet, $p \in]0,1[$ donc

$$|(-p)^n| = p^n < p$$

On en déduit que les variables X_n et X_{n+1} ne sont pas indépendantes.

- Si $n = 1$, X_1 est constante égale à 1 donc X_1 et X_2 sont indépendantes.

□

5. a) Reconnaître la loi de Z.

Démonstration.

- L'expérience (du point de vue des parties) consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, dont le succès est « le joueur combat le boss final ». La probabilité de succès est p.
- La variable aléatoire Z est égale au rang du premier succès.
- On en déduit que

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

□

b) Montrer que $T = Z + 1$. En déduire $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Le numéro de la première partie où le joueur combat le boss final est $Z(\omega)$. Chaque partie où le joueur ne combat pas le boss final est constituée d'un unique combat (perdu) au niveau 1, tandis qu'une partie où le joueur combat le boss final est constituée de deux parties. On en déduit que

$$T(\omega) = 1 \times (Z(\omega) - 1) + 2 \times 1 = Z(\omega) + 1$$

- Z admet une espérance et une variance donc T également par transformation affine.

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Z+1) = \mathbb{E}(Z) + 1 = \frac{1}{p} + 1 = \frac{1+p}{p} \qquad \textit{(par linéarité)}$$

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(Z+1) = \mathbb{V}(Z) = \frac{1-p}{p^2} \qquad \textit{(par propriété de la variance)}$$

□

Partie II : espérance conditionnelle

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que, pour tout $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$.
Pour tout événement A tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on définit, sous réserve d'existence, l'*espérance conditionnelle de X sachant A* :

$$\mathbb{E}_A(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \; \mathbb{P}_A([X = x])$$

6. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

a) Démontrer que $\mathbb{P}_A$ est une application probabilité.

Démonstration.

- Soit B un événement. Par définition :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Or, $A \cap B \subset A$ donc, par croissance de $\mathbb{P}$: $0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$. D'où

$$\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}_A(B) \leqslant 1.}$$

- $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$
- Soit (B_n) une suite d'événements deux à deux incompatibles.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n))}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)
\end{aligned}$$

Ces trois points prouvent que

$$\boxed{\mathbb{P}_A \text{ est une application probabilité.}}$$

□

b) En déduire un argument non calculatoire pour justifier le fait que l'opérateur d'espérance conditionnelle sachant A est linéaire.

Démonstration. L'opérateur d'espérance usuelle est défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La définition de l'espérance conditionnelle sachant A est identique à ceci près que l'on remplace $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}_A$ dans la formule. Ceci veut dire que l'espérance conditionnelle sachant A sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ coïncide avec l'espérance usuelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$. Elle possède donc les même propriétés générales, en particulier la propriété de linéarité. □

7. Démontrer, sous réserve d'existence et en admettant que l'on peut intervertir les sommes, la formule des espérances totales :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y])\mathbb{E}_{[Y=y]}(X)$$

Démonstration. Sous réserve d'existence de chancun des termes :

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y])\mathbb{E}_{[Y=y]}(X) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y]) \sum_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}([Y = y])\mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \\
&= \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}([Y = y] \cap [X = x]) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} x \ \mathbb{P}([Y = y] \cap [X = x]) && \textit{(interversion des sommes)} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [X = x]) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x]) && \textit{(formule des probabilités totales avec le système complet d'événements } ([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}\textit{)} \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

□

Partie III : cas général

On note, pour tout $m \in [\![0, N]\!]$, $u_m = \prod_{i=1}^{m} p_i$. Par convention, $u_0 = 1$.

8. ***a)*** Justifier : $Y_1(\Omega) = [\![1, N+1]\!]$.

Démonstration. Y_1 est la variable aléatoire égale au niveau maximal atteint lors de la première partie jouée. Il y a $N+1$ niveaux en tout et le joueur a une chance de mourir à n'importe quel niveau. Ainsi, Y_1 peut prendre toutes les valeurs de 1 à $N+1$. □

b) Démontrer que, pour tout $m \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}([Y_1 = m]) = u_{m-1} - u_m$.
(on pourra décomposer l'événement $[Y_1 = m]$ à l'aide des variables aléatoires X_n)

Démonstration. Soit $m \in [\![1, N]\!]$.

$[Y_1 = m]$ est réalisé
$\Longleftrightarrow$ le niveau maximal atteint lors de la première partie est le m^{e} niveau
$\Longleftrightarrow$ le joueur gagne ses $m-1$ premiers combats aux niveaux $1, \dots, m-1$
`ET` il perd son m^{e} combat au niveau m (car $m \leqslant N$)
$\Longleftrightarrow$ $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 2] \cap \cdots \cap [X_m = m] \cap [X_{m+1} = 1]$ est réalisé

On en déduit, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([Y_1 = m]) \\
=&\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 2] \cap \cdots \cap [X_m = m] \cap [X_{m+1} = 1]) \\
=&\mathbb{P}([X_1 = 1])\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 2]) \dots \mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{m-1}=m-1]}([X_m = m])\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_m=m]}([X_{m+1} = 1]) \\
=&1 \times \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 2]) \dots \mathbb{P}_{[X_{m-1}=m-1]}([X_m = m])\mathbb{P}_{[X_m=m]}([X_{m+1} = 1])
\end{aligned}$$

(car (X_n) est une chaîne de Markov)

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=1}^{m-1} p_i\right) \times q_m \qquad (\mathbb{P}_{[X_m=m]}([X_{m+1}=1]) = q_m \ \textit{car } m \leqslant N) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{m-1} p_i\right) \times (1-p_m) \\
&= \prod_{i=1}^{m-1} p_i - \prod_{i=1}^{m} p_i \\
&= u_{m-1} - u_m
\end{aligned}$$

Commentaire

On peut remarquer que $u_m = \mathbb{P}([Y_1 > m])$. On nous demande donc de démontrer dans cette question que :

$$\mathbb{P}([Y_1 = m]) = \mathbb{P}([Y_1 > m-1]) - \mathbb{P}([Y_1 > m])$$

Il s'agit d'une formule classique pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, qu'il faut savoir redémontrer dans le cas général.

$\square$

c) Calculer $\mathbb{P}([Y_1 = N+1])$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& [Y_1 = N+1] \text{ est réalisé} \\
\iff & \text{le niveau maximal atteint lors de la première partie est le } (N+1)^{\text{e}} \text{ niveau} \\
\iff & \text{le joueur gagne ses } N \text{ premiers combats aux niveaux } 1, \dots, N \\
& \text{(ce qu'il fait au niveau } N+1 \text{ n'a pas d'importance)} \\
\iff & [X_1 = 1] \cap [X_2 = 2] \cap \dots \cap [X_{N+1} = N+1] \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

On en déduit, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y_1 = N+1]) &= \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 2] \cap \dots \cap [X_{N+1} = N+1]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = 1]) \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 2]) \dots \mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\dots\cap[X_N=N]}([X_{N+1} = N+1]) \\
&= 1 \times \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 2]) \times \dots \times \mathbb{P}_{[X_N=N]}([X_{N+1} = N+1])
\end{aligned}$$

(car (X_n) est une chaîne de Markov)

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=1}^{N} p_i\right) \\
&= u_N
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_1 = N+1]) = u_N.}$$

$\square$

9. a) Expliquer pourquoi les variables aléatoires Y_j suivent toutes la même loi et sont indépendantes.

Démonstration.

- Commençons par remarquer que les p_i ne dépendent pas du temps (la chaîne de Markov est homogène). Puisque chaque partie commence au niveau 1, chaque partie suit les même « règles » de passage d'un niveau à un autre et donc les variables aléatoires Y_j suivent toutes la même loi.
- De plus, les résultats de deux combats différents sont toujours indépendants (il s'agit d'une chaîne de Markov, le futur dépend uniquement du présent et pas du passé). Puisque chaque partie concerne des combats différents de toutes les autres parties, il vient que les variables aléatoires Y_j sont mutuellement indépendantes.

□

b) En déduire que : $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(u_N)$. On explicitera le calcul de $\mathbb{P}([Z = k])$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on remarque que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. En effet, le joueur peut combattre le boss final dès la première partie, mais le temps d'attente avant de le combattre peut être arbitrairement grand.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{cl} & [Z = k] \text{ est réalisé} \\ \Longleftrightarrow & \text{le joueur combat pour la première fois le boss final lors de la partie } k \\ \Longleftrightarrow & \text{le joueur combat le boss final lors de la partie } k \\ & \texttt{ET} \text{ le joueur ne combat pas le boss final lors des parties numéros } 1, \dots, k-1 \\ \Longleftrightarrow & [Y_1 \leqslant N] \cap [Y_2 \leqslant N] \cap \dots \cap [Y_{k-1} \leqslant N] \cap [Y_k = N+1] \text{ est réalisé} \end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}([Y_1 \leqslant N] \cap [Y_2 \leqslant N] \cap \dots \cap [Y_{k-1} \leqslant N] \cap [Y_k = N+1]) \\ &= \mathbb{P}([Y_1 \leqslant N])\mathbb{P}([Y_2 \leqslant N]) \dots \mathbb{P}([Y_{k-1} \leqslant N])\mathbb{P}([Y_k = N+1]) && \textit{(par indépendance)} \\ &= \mathbb{P}([Y_1 \leqslant N])^{k-1} \ \mathbb{P}([Y_1 = N+1]) && \textit{(car les } Y_j \textit{ suivent la même loi)} \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{[Y_1 = N+1]}\right)^{k-1} \ \mathbb{P}([Y_1 = N+1]) && \textit{(car } Y_1(\Omega) = [\![1, N+1]\!]\textit{)} \\ &= (1 - u_N)^{k-1} \, u_N && \textit{(cf question 8c)} \end{aligned}$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(u_N).}$$

□

10. a) Déterminer la loi conditionnelle de Y_1 sachant $[Y_1 \leqslant N]$.

Démonstration. Rappelons que $Y_1(\Omega) = [\![1, N+1]\!]$ et donc $[Y_1 \leqslant N] = [Y_1 \neq N+1]$.
On en déduit que si l'événement $[Y_1 \leqslant N]$ est réalisé, alors la variable aléatoire Y_1 peut prendre les valeurs $1, \dots, N$ mais pas la valeur $N+1$. Soit $m \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Y_1 \leqslant N]}([Y_1 = m]) &= \frac{[Y_1 \leqslant N] \cap \mathbb{P}([Y_1 = m])}{\mathbb{P}([Y_1 \leqslant N])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([Y_1 = m])}{\mathbb{P}([Y_1 \leqslant N])} && \textit{(car } [Y_1 = m] \subset [Y_1 \leqslant N]\textit{)} \\
&= \frac{u_{m-1} - u_m}{1 - u_N} && \textit{(cf questions 8b et 8c)}
\end{aligned}$$

$\square$

b) Soient $1 \leqslant j < k$ et soit $m \in Y_j(\Omega)$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([Y_j = m]) = \mathbb{P}_{[Y_j \leqslant N]}([Y_j = m]) = \mathbb{P}_{[Y_1 \leqslant N]}([Y_1 = m])$$

Démonstration. Soient $1 \leqslant j < k$ et soit $m \in Y_j(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{[Z=k]}([Y_j = m]) \\
=&\frac{\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y_j = m])}{\mathbb{P}([Z = k])} \\
=&\frac{(\mathbb{P}([Y_1 \leqslant N] \cap [Y_2 \leqslant N] \cap \cdots \cap [Y_{k-1} \leqslant N] \cap [Y_k = N + 1]) \cap [Y_j = m])}{\mathbb{P}([Y_1 \leqslant N] \cap [Y_2 \leqslant N] \cap \cdots \cap [Y_{k-1} \leqslant N] \cap [Y_k = N + 1])} \\
=&\frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [Y_i \leqslant N]\right) \cap [Y_k = N + 1] \cap [Y_j = m]\right)}{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [Y_i \leqslant N]\right) \cap [Y_k = N + 1]\right)} \\
=&\frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant k-1 \\ i\neq j}} [Y_i \leqslant N]\right) \cap [Y_j \leqslant N] \cap [Y_k = N + 1] \cap [Y_j = m]\right)}{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [Y_i \leqslant N]\right) \cap [Y_k = N + 1]\right)} \\
=&\frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant k-1 \\ i\neq j}} [Y_i \leqslant N]\right) \cap [Y_k = N + 1] \cap [Y_j = m]\right)}{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [Y_i \leqslant N]\right) \cap [Y_k = N + 1]\right)} && \textit{(car } [Y_j = m] \subset [Y_j \leqslant N]\textit{)} \\
=&\frac{\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant k-1 \\ i\neq j}} \mathbb{P}([Y_i \leqslant N])\right) \times \mathbb{P}([Y_k = N + 1]) \times \mathbb{P}([Y_j = m])}{\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant k-1} \mathbb{P}([Y_i \leqslant N])\right) \times \mathbb{P}([Y_k = N + 1])} && \textit{(par indépendance)} \\
=&\frac{\mathbb{P}([Y_j = m])}{\mathbb{P}([Y_j \leqslant N])} \\
=&\frac{\mathbb{P}([Y_j = m] \cap [Y_j \leqslant N])}{\mathbb{P}([Y_j \leqslant N])} \\
=&\mathbb{P}_{[Y_j \leqslant N]}([Y_j = m])
\end{aligned}$$

D'autre part, Y_j et Y_1 suivant la même loi :

$$\mathbb{P}_{[Y_j \leqslant N]}([Y_j = m]) = \frac{\mathbb{P}([Y_j = m])}{\mathbb{P}([Y_j \leqslant N])} = \frac{\mathbb{P}([Y_1 = m])}{\mathbb{P}([Y_1 \leqslant N])} = \mathbb{P}_{[Y_1 \leqslant N]}([Y_1 = m])$$

□

c) Soient $1 \leqslant j < k$. Montrer que

$$\mathbb{E}_{[Z=k]}(Y_j) = \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N} u_m - (N+1)u_N\right)$$

Démonstration. Soient $1 \leqslant j < k$.

- Tout d'abord, Y_j étant une variable aléatoire finie (ses valeurs possibles sont $1, \ldots, N+1$), elle admet une espérance conditionnelle sachant $[Z = k]$.
- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{[Z=k]}(Y_j) &= \sum_{m=1}^{N+1} m\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([Y_j = m]) \\
&= \sum_{m=1}^{N+1} m\ \mathbb{P}_{[Y_1 \leqslant N]}([Y_1 = m]) && \textit{(cf question 10b)} \\
&= \sum_{m=1}^{N} m\ \mathbb{P}_{[Y_1 \leqslant N]}([Y_1 = m]) && \textit{(car } \mathbb{P}_{[Y_1 \leqslant N]}([Y_1 = N+1]) = 0\textit{)} \\
&= \sum_{m=1}^{N} m \frac{u_{m-1} - u_m}{1-u_N} && \textit{(cf question 10a)} \\
&= \frac{1}{1-u_N} \sum_{m=1}^{N} m(u_{m-1} - u_m) \\
&= \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=1}^{N} m u_{m-1} - \sum_{m=1}^{N} m u_m\right) \\
&= \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N-1} (m+1) u_m - \sum_{m=1}^{N} m u_m\right) \\
&= \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N-1} u_m + \sum_{m=0}^{N-1} m u_m - \sum_{m=1}^{N} m u_m\right) \\
&= \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N-1} u_m - N u_N\right) \\
&= \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N-1} u_m + u_N - u_N - N u_N\right) \\
&= \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N} u_m - (N+1) u_N\right)
\end{aligned}$$

Commentaire

Les candidat·es averti·es auront reconnu ici aussi un calcul classique sur les variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Dans le DS4 vB, cette question était formulée de la manière suivante :
Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\,\mathbb{P}([X>p])$$

□

11. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$ et on pose $W = S_{Z-1}$. Autrement dit, W est la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ W(\omega) = S_{Z(\omega)-1}(\omega) = \sum_{j=1}^{Z(\omega)-1} Y_j(\omega)$$

a) Démontrer : $W(\Omega) = \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, $W(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (une somme d'entiers naturels est un entier naturel).
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'issue particulière

$$\omega = (1, 1, \dots, 1, 1, 2, \dots, N+1, 1, \dots)$$

comportant k fois l'état 1 au début. Les $k-1$ premiers numéros 1 correspondent chacun à une partie s'arrêtant au premier niveau. Le k^{e} numéro 1 est le premier état d'une partie où le joueur combat le boss final.

On a alors $Z(\omega) = k$ et $W(\omega) = \sum_{j=1}^{k-1} Y_j(\omega) = \sum_{j=1}^{k-1} 1 = k-1$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on obtient que tout nombre $j \in \mathbb{N}$ est une valeur possible de W. Donc $\mathbb{N} \subset W(\Omega)$.

Finalement,

$$\boxed{W(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

□

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $n \geqslant (k-1)N$,

$$\sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) = \mathbb{E}_{[Z=k]}\left(S_{k-1}\right)$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \geqslant (k-1)N$.

- Les variables aléatoires Y_j sont toutes à valeurs dans $[\![1, N+1]\!]$ (cf question 8a) donc $S_{k-1}(\Omega) \subset [\![0, (k-1)(N+1)]\!]$. La variable aléatoire S_{k-1} étant finie, elle admet une espérance conditionnelle sachant $[Z = k]$ et, par définition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{[Z=k]}\left(S_{k-1}\right) &= \sum_{i=0}^{(k-1)(N+1)} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) \\
&= \sum_{i=0}^{(k-1)N} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) + \sum_{i=(k-1)N+1}^{(k-1)(N+1)} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i])
\end{aligned}$$

Or, si l'événement $[Z = k]$ est réalisé, alors pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$ les variables aléatoires Y_j ne peuvent pas prendre la valeur $N+1$ et donc prennent nécessairement une valeur inférieur ou égale à N. On en déduit que, dans ce cas, S_{k-1} prend nécessairement une valeur inférieur ou égale à $(k-1)N$. Donc

$$\sum_{i=(k-1)N+1}^{(k-1)(N+1)} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) = 0$$

D'où

$$\mathbb{E}_{[Z=k]}\left(S_{k-1}\right) = \sum_{i=0}^{(k-1)N} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i])$$

- Pour la même raison et par relation de Chasles ($n \geqslant (k-1)N$), on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) &= \sum_{i=0}^{(k-1)N} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) + \sum_{i=(k-1)N+1}^{n} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) \\ &= \sum_{i=0}^{(k-1)N} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i])\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) = \mathbb{E}_{[Z=k]}\left(S_{k-1}\right).}$$

□

c) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}_{[Z=k]}(W)$ existe et

$$\mathbb{E}_{[Z=k]}(W) = \mathbb{E}_{[Z=k]}\left(S_{k-1}\right)$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La variable aléatoire W est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc W admet une espérance conditionnelle sachant $[Z = k]$ si et seulement si la série $\sum\ i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([W = i])$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence car il s'agit d'une série à termes positifs.
- Soit $n \geqslant (k-1)N$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([W = i]) &= \sum_{i=0}^{n} i\ \frac{\mathbb{P}([Z = k] \cap [W = i])}{\mathbb{P}([Z = k])} \\ &= \sum_{i=0}^{n} i\ \frac{\mathbb{P}([Z = k] \cap [S_{Z-1} = i])}{\mathbb{P}([Z = k])} \\ &= \sum_{i=0}^{n} i\ \frac{\mathbb{P}([Z = k] \cap [S_{k-1} = i])}{\mathbb{P}([Z = k])} \\ &= \sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([S_{k-1} = i]) \\ &= \mathbb{E}_{[Z=k]}\left(S_{k-1}\right) && \textit{(cf question 11b)}\end{aligned}$$

Cette dernière expression ne dépend pas de n. On en déduit que la suite des sommes partielles est constante à partir d'un certain rang et donc converge. De plus :

$$\mathbb{E}_{[Z=k]}(W) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}_{[Z=k]}([W = i]) = \mathbb{E}_{[Z=k]}\left(S_{k-1}\right)$$

□

12. a) Démontrer : $T = W + N + 1$.

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$.

- On a $W(\omega) = \displaystyle\sum_{j=1}^{Z(\omega)-1} Y_j(\omega)$ donc $W(\omega)$ compte le nombre total de combats effectués lors des $Z(\omega) - 1$ premières parties.
- Par définition de Z, la partie numéro $Z(\omega)$ comporte $N + 1$ combats. Ainsi, $W(\omega) + N + 1$ compte le nombre total de combats effectués lors des $Z(\omega)$ premières parties.
- Toujours par définition de Z, aucun des combats effectués lors des $Z(\omega) - 1$ premières parties n'est fait contre le boss final, tandis qu'au cours de la partie numéro $Z(\omega)$, seul le dernier combat est effectué contre le boss final. Les combats étant numérotés à partir de 1, on en déduit que $W(\omega) + N + 1$ est précisément le numéro du premier combat effectué contre le boss final.

D'où $T(\omega) = W(\omega) + N + 1$. Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$, on a alors

$$\boxed{T = W + N + 1.}$$

□

b) En déduire que : $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{u_N} \displaystyle\sum_{m=0}^{N} u_m$. Ce résultat est-il cohérent avec celui de la partie **I** ?

Démonstration.

- $T = W + N + 1$ et $N + 1$ est une constante donc, par transformation affine, T admet une espérance si et seulement si W admet une espérance. Sous réserve d'existence, on a $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(W) + N + 1$ par linéarité de l'espérance.
- Notons que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. D'après la formule des espérances totales (question 7), la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si la série $\sum \mathbb{P}([Z = k])\mathbb{E}_{[Z=k]}(W)$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence car il s'agit d'une série à termes positifs. De plus, en cas de convergence, on aura

$$\mathbb{E}(W) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = k])\mathbb{E}_{[Z=k]}(W)$$

Soit $n \geqslant 1$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{E}_{[Z=k]}(W) \\
=&\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{E}_{[Z=k]}\left(S_{k-1}\right) && \textit{(cf question 11c)} \\
=&\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{E}_{[Z=k]}\left(\sum_{j=1}^{k-1} Y_j\right) \\
=&\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{E}_{[Z=k]}\left(Y_j\right) && \textit{(par linéarité, cf question 6b)} \\
=&\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N} u_m-(N+1)u_N\right) && \textit{(cf question 10c)} \\
=&\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])(k-1)\frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N} u_m-(N+1)u_N\right) \\
=&\frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N} u_m-(N+1)u_N\right)\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])(k-1)
\end{aligned}
$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k])(k-1)=\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([Z=k])-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)-1$$

car $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(u_N\right)$ (cf question 9b).
On en déduit que W admet une espérance (la série converge) et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(W) &= \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N} u_m-(N+1)u_N\right)(\mathbb{E}(Z)-1) \\
&= \frac{1}{1-u_N}\left(\sum_{m=0}^{N} u_m-(N+1)u_N\right)\left(\frac{1}{u_N}-1\right) \\
&= \frac{1}{\cancel{1-u_N}}\left(\sum_{m=0}^{N} u_m-(N+1)u_N\right)\frac{\cancel{1-u_N}}{u_N} \\
&= \frac{1}{u_N}\sum_{m=0}^{N} u_m-(N+1)
\end{aligned}
$$

- Finalement, T admet une espérance et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(W)+N+1 \\
&= \frac{1}{u_N}\sum_{m=0}^{N} u_m-(N+1)+N+1 \\
&= \frac{1}{u_N}\sum_{m=0}^{N} u_m
\end{aligned}
$$

- Lorsque $N = 1$, on trouve $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{u_1} \displaystyle\sum_{m=0}^{1} u_m = \dfrac{1}{p_1}(1 + p_1) = \dfrac{1+p}{p}$ en posant $p = p_1$. On retrouve bien le résultat de la partie **I**.

□

c) On suppose, **dans cette question uniquement**, que : pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $p_i = p \in]0, 1[$.
Démontrer : $\mathbb{E}(T) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(1-p)p^N}$.

Démonstration. Sous l'hypothèse faite dans cette question, pour tout $m \in [\![0, N]\!]$,

$$u_m = \prod_{i=1}^{m} p_i = \prod_{i=1}^{m} p = p^m$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \frac{1}{u_N} \sum_{m=0}^{N} u_m \\ &= \frac{1}{p^N} \sum_{m=0}^{N} p^m\end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique de raison p, vérifiant $|p| < 1$. Cette série est donc convergente et

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{N} p^m = \frac{1}{1-p} \neq 0$$

donc $\displaystyle\sum_{m=0}^{N} p^m \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-p}$ et par produit :

$$\mathbb{E}(T) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^N} \frac{1}{1-p} = \frac{1}{(1-p)p^N}$$

□

13. *Simulations informatiques.* On rappelle qu'en **Python**, si `L` est une liste, la commande `len(L)` renvoie la taille de `L` et la commande `L[-1]` permet d'accéder au dernier élément de `L`.

a) Ecrire une fonction **Python**, nommée `CalcU`, qui prend en argument une liste de probabilités `P = [`p_1`, ... ,`p_N`]` et qui renvoie la liste `U = [`u_0`, ... ,`u_N`]`.

Démonstration.

```
def CalcU(P):
    U = [1]
    for k in range(len(P)):
        U.append(U[-1]*P[k])
    return U
```

ou encore, de manière plus élégante,

```
def CalcU(P):
    U = [1]
    for p in P:
        U.append(U[-1]*p)
    return U
```

□

b) Ecrire une fonction **Python**, nommée `CalcEsp`, qui prend en argument une liste de probabilités `P = [`p_1`,...,`p_N`]` et qui renvoie l'espérance de T (on utilisera la question 12b).

Démonstration.

```
def CalcEsp(P):
    U = CalcU(P)
    return sum(U)/U[-1]
```

□

c) Compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle prenne en argument une liste de probabilités `P = [`p_1`,...,`p_N`]` et un entier `a` spécifiant l'état de la chaîne de Markov à un instant donné et qu'elle renvoie l'état à l'instant suivant.

```
def EtapeMarkov(P,a):
    N = len(P)
    if a == _______:
        return 1
    else:
        r = rd.random()
        if r < __________:
            return a+1
        return _____
```

Démonstration.

```
def EtapeMarkov(P,a):
    N = len(P)
    if a == N+1:
        return 1
    else:
        r = rd.random()
        if r < P[a-1]:
            return a+1
        return 1
```

□

Problème 2 (ESSEC I 2007)

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

I. Préliminaires

Dans cette partie **I.**, λ désigne un réel strictement positif.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la fonction : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (appelée *fonction de survie de X*).

Démonstration.

- Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent alors :

  × si $x < 0$:

$$\mathbb{P}([X > x]) \; = \; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]) \; = \; 1 - F_X(x) \; = \; 1 - 0 \; = \; 1$$

  × si $x \geqslant 0$:

$$\mathbb{P}([X > x]) \; = \; 1 - F_X(x) \; = \; \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \; = \; \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction de survie est : } x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

□

b) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$; justifier alors que, si X modélise la durée de vie d'un phénomène, on dise de ce dernier qu'il est « sans vieillissement ».

Démonstration.
Soient $x > 0$ et $y > 0$.

- D'après la question précédente, $\mathbb{P}([X > x]) > 0$.
- On peut donc calculer la probabilité conditionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) \; &= \; \frac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} \\ &= \; \frac{\mathbb{P}([X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} && \textit{(car, comme } y > 0, \; [X > x + y] \subset [X > x]\textit{)} \\ &= \; \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} && \textit{(car } x + y \geqslant 0 \textit{ et } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= \; \frac{\cancel{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \; \mathrm{e}^{-\lambda y}}{\cancel{\mathrm{e}^{-\lambda x}}} \\ &= \; \mathrm{e}^{-\lambda y} \; = \; \mathbb{P}([X > y]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])}$$

La probabilité que le phénomène ait encore lieu après $x + y$ « heures » sachant qu'il a déjà eut lieu durant x heures ne dépend que de la durée supplémentaire $x + y - x = y$ ajoutée. Il est donc sans vieillissement.

Commentaire

Soit $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$. Démontrons l'inclusion : $[X > x + y] \subset [X > x]$.
Soit $\omega \in [X > x + y]$, alors : $X(\omega) > x + y$.
Par transitivité, on obtient :

$$X(\omega) \; > \; x + y \; > \; x \quad \textit{(car } y > 0\textit{)}$$

Ainsi : $X(\omega) \; > \; x$. Ou encore : $\omega \in [X > x]$.

□

2. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que somme de variables aléatoires qui admettent toutes une espérance.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda} & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi } \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & n \, \dfrac{1}{\lambda} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda}}$$

- La v.a.r. S_n admet une variance en tant que somme de variables aléatoires qui admettent toutes une variance.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda^2} & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi } \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & n \, \dfrac{1}{\lambda^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}}$$

□

b) Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n admet pour densité la fonction :

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour cela, on admettra que, si U et V sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité les fonctions f_U et f_V, alors la variable aléatoire $U+V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x) f_V(t-x)\, dx.$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\quad \mathcal{P}(n)$: S_n est une variable à densité, de densité f_n.

▸ **Initialisation** :

- D'une part, par définition : $f_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^0 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$

  Or, pour tout $t \geqslant 0$:
  $$\frac{\lambda}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^0 \ = \ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$$
  Ainsi : $f_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$.
  On reconnaît une densité d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

- D'autre part : $S_1 = X_1$. Donc : $S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
(*i.e.* S_{n+1} est une variable à densité, de densité f_{n+1}).

- Remarquons tout d'abord : $S_{n+1}(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
  En effet, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $X_i = [0, +\infty[$.

- De plus :
  $$S_{n+1} \ = \ \sum_{k=1}^{n+1} X_k \ = \ \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) + X_{n+1} \ = \ S_n + X_{n+1}$$
  On est dans le cadre d'utilisation du théorème fourni par l'énoncé :
  × par hypothèse de récurrence, S_n est une variable à densité, de densité f_n.
  × d'après l'énoncé, X_{n+1} est une variable à densité de densité f_1, car $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
  × d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. S_n et X_{n+1} sont indépendantes, car les v.a.r. $X_1, \ldots, X_{n+1}$ sont indépendantes.

- On en déduit que S_{n+1} est une v.a.r. à densité et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
  $$f_{S_{n+1}}(t) \ = \ f_{S_n + X_{n+1}}(t) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, f_1(t-x)\ dx$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $t < 0$, alors, comme $S_{n+1}(\Omega) \subset [0, +\infty[$: $F_{S_{n+1}}(t) = 0$. On en déduit :

$$f_{S_{n+1}}(t) = F'_{S_{n+1}}(t) = 0$$

× si $t \geqslant 0$. Cherchons d'abord à savoir sur quel ensemble la fonction $x \mapsto f_n(x)\, f_1(t-x)$ ne s'annule pas afin de préciser l'intervalle d'intégration.

- Comme, par hypothèse de récurrence, en particulier, f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$f_{S_{n+1}}(t) \ = \ \int_0^{+\infty} f_n(x)\, f_1(t-x)\ dx$$

- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [0, +\infty[\\ f_1(t-x) \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0, +\infty[\\ (t-x) \in [0, +\infty[\end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ t-x \geqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ x \leqslant t \end{array} \right. \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant t$$

Ainsi :

$$f_{n+1}(t) \ = \ \int_0^t f_n(x)\, f_1(t-x)\ dx$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl} f_{S_{n+1}}(t) & = & \displaystyle\int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda x}\ x^{n-1}\ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda x}}\ x^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \cancel{\mathrm{e}^{\lambda x}}\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t x^{n-1}\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t} \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^t \\ & = & \displaystyle\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^n \end{array}$$

Finalement : $f_{S_{n+1}} : t \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0 \end{array} \right.$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \text{ est une variable à densité de densité } f_n.}$$

Commentaire

Pour bien comprendre la présentation du cas « $t \geqslant 0$ », remarquons qu'on cherche, comme annoncé, l'ensemble sur lequel produit $f_n(x)\, f(t-x)$ est non nul. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_n(x)\, f_1(t-x) \neq 0 &\Leftrightarrow \left\{ f_n(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad f_1(t-x) \neq 0 \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [0, +\infty[\\ (t-x) \in [0, +\infty[\end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ t - x \geqslant 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ x \leqslant t \end{array} \right. \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant t \end{aligned}$$

Cette présentation est d'ailleurs tout aussi acceptable, mais elle sort un peu des présentations usuelles. C'est pourquoi on lui a préféré la précédente.

□

II. Loi de Pareto (Vilfredo Pareto (1848-1923), sociologue et économiste italien)

Soient a et b des réels strictement positifs. Par définition, on dit d'une variable aléatoire qu'elle suit la loi de Pareto de paramètres a et b si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < b\,; \\ a \dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geqslant b. \end{array} \right.$$

Soit alors X une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres a et b.

3. Vérifier que l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$ est bien satisfaite ; calculer l'espérance et la variance de X, en précisant à quelles conditions chacune de ces quantités existe.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{b}^{+\infty} f(t)\, dt$$

- La fonction f est continue par morceaux sur $[b, +\infty[$.
- Soit $A \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_b^A f(t)\, dt &= \int_b^A a \frac{b^a}{t^{a+1}}\, dt = a\, b^a \int_b^A t^{-a-1}\, dt \\ &= a\, b^a \left[\frac{t^{-a}}{-a} \right]_b^A = -b^a \left[\frac{1}{t^a} \right]_b^A && \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\ &= -b^a \left(\frac{1}{A^a} - \frac{1}{b^a} \right) \\ &\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} -b^a \left(0 - \frac{1}{b^a} \right) = 1 && \textit{(car } a > 0\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ est convergente et vaut } 1.}$$

Commentaire

- La question demande de démontrer la convergence d'une intégrale impropre mais exige aussi la valeur de cette intégrale. Dans ce cas, comme rédigé ici, la convergence est une conséquence du résultat obtenu par calcul.
- La démonstration de la convergence était simple puisque $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ ($b > 0$) et d'exposant $a + 1 > 1$.
  Elle est donc convergente.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f(t)\ dt$.
  × Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt \ = \ \int_b^{+\infty} t\ f(t)\ dt$$
  × De plus, pour tout $t \in [b, +\infty[$:
  $$t\, f(t) \ = \ t\ \frac{a\, b^a}{t^{a+1}} \ = \ a\, b^a\ \frac{1}{t^a}$$
  × Or $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^a}\ dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ ($b > 0$), d'exposant a.
  Elle est donc convergente si et seulement si $a > 1$.

  $\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si } a > 1.}$

- Supposons alors $a > 1$.
  Soit $A \in [b, +\infty[$.
  $$\begin{aligned}
  \int_b^A t\ f(t)\ dt \quad &= \quad a\, b^a \int_b^A t^{-a}\ dt \\
  &= \quad a\, b^a \left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_b^A && \textit{(car } a \neq 1\textit{)} \\
  &= \quad -\frac{a\, b^a}{a-1} \left[\frac{1}{t^{a-1}}\right]_b^A \\
  &= \quad -\frac{a\ b^a}{a-1} \left(\frac{1}{A^{a-1}} - \frac{1}{b^{a-1}}\right) \\
  &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \quad -\frac{a\ b^a}{a-1} \left(0 - \frac{1}{b^{a-1}}\right) && \textit{(car } a-1 > 0\textit{)}
  \end{aligned}$$
  Enfin :
  $$-\frac{a\ b^a}{a-1}\left(-\frac{1}{b^{a-1}}\right) \ = \ \frac{a\ \cancel{b^a}}{(a-1)\cancel{b^a}\ b^{-1}} \ = \ \frac{a\, b}{a-1}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 1 : \mathbb{E}(X) = \frac{a\, b}{a-1}.}$$

Commentaire

Insistons sur le fait que les limites :

$$\lim_{A \to +\infty} A^{a-1} = +\infty \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A^{a-1}} = 0$$

ne sont valables que si $a - 1 > 0$.

- On procède de même pour la variance.
La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, f(t) \, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \, f(t) \, dt$.
  × Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, f(t) \, dt \; = \; \int_{b}^{+\infty} t^2 \, f(t) \, dt$$

  × De plus, pour tout $t \in [b, +\infty[$:

$$t^2 \, f(t) \; = \; t^2 \, \frac{a \, b^a}{t^{a+1}} \; = \; a \, b^a \, \frac{1}{t^{a-1}}$$

  × Or $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} \frac{1}{t^{a-1}} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ ($b > 0$), d'exposant $a - 1$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $a - 1 > 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une variance si et seulement si } a > 2.}$$

- Supposons alors $a > 2$.
Soit $A \in [b, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_{b}^{A} t \, f(t) \, dt & = & a \, b^a \displaystyle\int_{b}^{A} t^{-a+1} \, dt & \\[2ex]
& = & a \, b^a \left[\dfrac{t^{-a+2}}{-a+2} \right]_{b}^{A} & \textit{(car } a \neq 2\textit{)} \\[2ex]
& = & -\dfrac{a \, b^a}{a-2} \left[\dfrac{1}{t^{a-2}} \right]_{b}^{A} & \\[2ex]
& = & -\dfrac{a \, b^a}{a-2} \left(\dfrac{1}{A^{a-2}} - \dfrac{1}{b^{a-2}} \right) & \\[2ex]
& \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} & -\dfrac{a \, b^a}{a-2} \left(0 - \dfrac{1}{b^{a-2}} \right) & \textit{(car } a - 2 > 0\textit{)}
\end{array}$$

Enfin :

$$-\frac{a \, b^a}{a-2} \left(-\frac{1}{b^{a-2}} \right) \; = \; \frac{a \, \cancel{b^a}}{(a-2) \cancel{b^a} \, b^{-2}} \; = \; \frac{a \, b^2}{a-2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 2 : \mathbb{E}(X^2) = \frac{a \, b^2}{a-2}.}$$

- Ainsi, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \frac{a\,b^2}{a-2} - \left(\frac{a\,b}{a-1}\right)^2 \\
&= ab^2 \left(\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2}\right) \\
&= ab^2 \left(\frac{(a-1)^2 - a(a-2)}{(a-2)\,(a-1)^2}\right) \\
&= ab^2 \left(\frac{(\cancel{a^2} - \cancel{2a} + 1) - (\cancel{a^2} - \cancel{2a})}{(a-2)\,(a-1)^2}\right) \\
&= ab^2 \, \frac{1}{(a-2)\,(a-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 2 : \mathbb{V}(X) = \frac{a\,b^2}{(a-2)\,(a-1)^2}.}$$

□

4. Déterminer la fonction de répartition de X. Préciser la fonction de survie : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in \,]-\infty, b[$. Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0$$

× si $x \in [b, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\
&= \int_{b}^{x} f(t)\, dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [b,+\infty[\textit{)} \\
&= \int_{b}^{x} a\, \frac{b^a}{t^{a+1}}\, dt \\
&= a\,b^a \int_{b}^{x} t^{-a-1}\, dt \\
&= \cancel{a}\,b^a \left[\frac{t^{-a}}{-\cancel{a}}\right]_b^x && \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\
&= -b^a \left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{b^a}\right) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geqslant b \end{cases}}$$

Déterminons la fonction de survie de X.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in]-\infty, b[$:

$$\mathbb{P}([X > x]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ 1 - F_X(x) \ = \ 1 - 0 \ = \ 1$$

× si $x \in [b, +\infty[$:

$$\mathbb{P}([X > x]) \ = \ 1 - F_X(x) \ = \ \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{b}{x}\right)^a\right) \ = \ \left(\frac{b}{x}\right)^a$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction de survie de } X \text{ est : } x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < b \\ \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geqslant b \end{cases}}$$

□

5. Démontrer que, pour tout réel y positif ou nul, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. De façon analogue à la question ***I.1.b)***, que peut-on dire d'un phénomène dont la durée de vie est modélisée par X ?

Démonstration.
Soit $y \geqslant 0$ et soit $x \in [b, +\infty[$.

- Comme $\mathbb{P}([X > x]) \neq 0$, on a (d'après ***I.1.b)***) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) &= \frac{\mathbb{P}([X > x + y] \ \cap \ [X > x])}{\mathbb{P}([X > x])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} && \textit{(car, comme } y \geqslant 0 \textit{ : } [X > x + y] \subset [X > x]\textit{)} \\ &= \frac{\left(\frac{b}{x+y}\right)^a}{\left(\frac{b}{x}\right)^a} && \textit{(car } x \in [b, +\infty[\textit{ et } x + y \in [b, +\infty[\textit{)} \\ &= \left(\frac{b}{x+y}\right)^a \ \left(\frac{x}{b}\right)^a \\ &= \frac{\cancel{b^a}}{(x+y)^a} \ \frac{x^a}{\cancel{b^a}} \ = \ \left(\frac{x}{x+y}\right)^a \end{aligned}$$

- Or : $\dfrac{x}{x+y} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$. On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+y} = 1$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^a = 1$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = 1.}$$

Si on considère que X modélise la durée de vie d'un phénomène, la propriété précédente signifie que plus le phénomène a duré longtemps (plus x est grand), plus la probabilité que le phénomène dure encore est grande. On parle alors de rajeunissement.

Commentaire

On cherche dans cette question à déterminer la limite de l'expression $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$ lorsque x tend vers $+\infty$. Il suffit donc de déterminer une expression de $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$ pour x assez grand. C'est pourquoi on choisit ici en début de preuve : $x \in [b, +\infty[$.

□

6. On pose dans cette question : $Y = \ln\left(\dfrac{X}{b}\right)$.

a) Démontrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $Y(\Omega)$.
  Notons $h : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{b}\right)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
  On considère ici $X(\Omega) \subset [b, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) & \\ & = & h([b, +\infty[) & \\ & = & [h(b), \displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x)[& \textit{(car la fonction } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [b, +\infty[\textit{)} \\ & = & [0, +\infty[& \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } Y(\Omega) = [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\ln\left(\dfrac{X}{b}\right) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{X}{b} \leqslant \mathrm{e}^x\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left([X \leqslant b\, \mathrm{e}^x]\right) & \textit{(car } b > 0\textit{)} \\ & = & F_X\big(b\ \mathrm{e}^x\big) & \\ & = & 1 - \left(\dfrac{\cancel{b}}{\cancel{b}\, \mathrm{e}^x}\right)^a & \textit{(car, comme } x \geqslant 0, \ b\, e^x \geqslant b\textit{)} \\ & = & 1 - \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^a \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit une loi $\mathcal{E}(a)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)}$$

Commentaire

Cette question amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r. .

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$
Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq\ ]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on se permet d'écrire :
  « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0,1]$. »
  × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
  On se permet alors d'écrire :
  « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient par une disjonction de cas).
- Ici, on s'est permis de considérer : $X(\Omega) = [b, +\infty[$ conformément à ce qui est dit au-dessus. Une telle hypothèse assure la bonne définition de la v.a.r. $Y = \ln(\frac{X}{b})$. Sans précision sur $X(\Omega)$, la v.a.r. Y est seulement presque sûrement bien définie (on a : $\mathbb{P}\big(\big[\frac{X}{b} > 0\big]\big) = 1$).

$\square$

b) Déduire de la question précédente une fonction **Python**, nommée `SimulX(a,b)`, qui permette de simuler la variable aléatoire X.

Démonstration.

```
def SimulX(a,b):
    Y = rd.exponential(1/a)
    return b * np.exp(Y)
```

□

III. Estimation des paramètres d'une loi de Pareto

Les instants aléatoires des arrivées de paquets (symboles binaires représentant de l'information de type audio, vidéo, données, ...) dans un canal de communication sont modélisés par une variable aléatoire X suivant une loi de Pareto de paramètres α et β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
On dit qu'un estimateur T_n de θ est *sans biais* si $\mathbb{E}(T_n) = \theta$.

7. On suppose tout d'abord que le paramètre β fait partie des caractéristiques connues du canal de communication ; on se propose de déterminer un estimateur de α par une méthode dite du « maximum de vraisemblance ».
Pour cela, n désignant un entier naturel non nul et x_1, ..., x_n des réels supérieurs ou égaux à β, on introduit la fonction $\mathcal{L}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\mathcal{L}(a) = f_a(x_1) \times \cdots \times f_a(x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_a(x_k),$$

où f_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \beta\,; \\ a\dfrac{\beta^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geqslant \beta. \end{cases}$$

a) Exprimer $\mathcal{L}(a)$, puis $\ln(\mathcal{L}(a))$.

Démonstration.

- Soit $a \in\,]0, +\infty[$. Comme $x_1, \ldots, x_n$ sont supérieurs ou égaux à β :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a) &= f_a(x_1) \times \cdots \times f_a(x_n) \\ &= a\,\frac{\beta^a}{(x_1)^{a+1}} \times \cdots \times a\,\frac{\beta^a}{(x_n)^{a+1}} \\ &= \frac{(a\,\beta^a)^n}{(x_1\ \cdots\ x_n)^{a+1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in\,]0, +\infty[,\ \mathcal{L}(a) = \frac{(a\,\beta^a)^n}{(x_1\ \cdots\ x_n)^{a+1}}}$$

- Soit $a \in\,]0, +\infty[$. Comme $\mathcal{L}(a) > 0$, on peut déterminer $\ln(\mathcal{L}(a))$:

$$\begin{aligned} \ln(\mathcal{L}(a)) &= \ln\left(\frac{(a\,\beta^a)^n}{(x_1\ \cdots\ x_n)^{a+1}}\right) \\ &= \ln((a\,\beta^a)^n) \ - \ \ln((x_1\ \cdots\ x_n)^{a+1}) \\ &= n\ln(a\,\beta^a) \ - \ (a+1)\ \ln(x_1\ \cdots\ x_n) \\ &= n\ln(a) + n\ \ln(\beta^a) \ - \ (a+1)\ \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in\,]0, +\infty[,\ \ln(\mathcal{L}(a)) = n\ \ln(a) + n\,a\ \ln(\beta) \ - \ (a+1)\ \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)}$$

□

b) On considère la fonction φ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$a \mapsto n\ln(a) + na\ln(\beta) - (a+1)\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)\,.$$

(i) Démontrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un unique réel w que l'on exprimera en fonction de x_1, ..., x_n et de β.

Démonstration.

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme somme des fonctions :
  - $\times$ $a \mapsto \ln(a)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$,
  - $\times$ $a \mapsto \left(n\ln(\beta) - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k)\right) a - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ car affine.
- Soit $a > 0$.

$$\varphi'(a) = \frac{n}{a} + n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) = \frac{n}{a} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(x_k) - \ln(\beta)) = \frac{n}{a} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)$$

- Déterminons le signe φ'.

$$\begin{aligned}
\varphi'(a) \geqslant 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{n}{a} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right) \geqslant 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{n}{a} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{a}{n} \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)} && \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad a \leqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)} && \textit{(car } n > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

- En notant $w = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)}$, on en déduit le tableau de variations de φ.

x	0		w		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(w)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \varphi \text{ admet un maximum atteint en un seul point } w = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{\beta}\right)} \in\ ]0,+\infty[.}$$

Commentaire

- Il faudrait préciser que $(x_1, \dots, x_k) \neq (\beta, \dots, \beta)$. Si tel n'est pas le cas, $\ln\left(\dfrac{x_k}{\beta}\right) = 0$ et l'écriture de w précédente n'est pas valide.
- Il s'agit certainement d'un petit oubli du concepteur de sujet.
  En effet, si $(x_1, \dots, x_k) = (\beta, \dots, \beta)$, alors $\varphi : a \mapsto n \ln\left(\dfrac{a}{\beta}\right)$ et dans ce cas, la fonction φ n'admet pas de maximum.

☐

(ii) Que peut-on dire de w pour la fonction $\mathcal{L}$?

Démonstration.
Soit $t \in]0, +\infty[$ tel que $t \neq w$.

$$\begin{array}{rcll} & \varphi(t) & < & \varphi(w) & \textit{(car } \varphi \textit{ atteint son unique maximum en } w\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \ln(\mathcal{L}(t)) & < & \ln(\mathcal{L}(w)) & \textit{(par définition de } \varphi\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \mathcal{L}(t) & < & \mathcal{L}(w) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } w \text{ est l'unique point en lequel } \mathcal{L} \text{ atteint un maximum.}}$

☐

c) On pose dorénavant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$W_n = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{X_k}{\beta}\right)}$$

(La suite $(W_n)_{n \geqslant 1}$ est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance.*)

(i) Justifier que la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{X_k}{\beta}\right)$ admet pour densité la fonction f_n définie dans ***I.2.b)*** en prenant $\lambda = \alpha$.

Démonstration.

- Par définition, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi de Pareto de paramètres α et β.
- D'après la question ***II.4***, la v.a.r. $\ln\left(\dfrac{X_k}{\beta}\right)$ suit la loi exponentielle de paramètre α.
- Les v.a.r. X_1, ..., X_n sont indépendantes.
  Par lemme des coalitions, on en déduit que les v.a.r. $\ln\left(\dfrac{X_1}{\beta}\right)$, ..., $\ln\left(\dfrac{X_n}{\beta}\right)$ sont elles aussi indépendantes.

$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question } \textbf{\textit{I.2.b)}}, \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{X_k}{\beta}\right) \text{ admet pour densité } f_n \text{ en prenant } \lambda = \alpha.}$ ☐

(ii) À l'aide du théorème de transfert, en déduire que W_n admet pour espérance $\dfrac{n\alpha}{n-1}$ lorsque $n \geqslant 2$, puis proposer un estimateur sans biais de α construit sur W_n.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- W_n s'écrit sous la forme $g(U_n)$ où :
  - × $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{X_k}{\beta}\right)$ est une v.a.r. de densité f_n (en prenant $\lambda = \alpha$),
  - × $g : t \mapsto \dfrac{n}{t}$.
- D'après le théorème de transfert, W_n admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, f_n(t)\, dt$ est absolument convergente.
  Or : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t)\, f_n(t) \geqslant 0$. Donc, cela revient à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, f_n(t)\, dt$ converge.
- La fonction f_n étant nulle en dehors de $[0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ f_n(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} g(t)\ f_n(t)\ dt$$
- Or, pour $t \in\ ]0, +\infty[$:
$$\begin{aligned} g(t)\ f_n(t) &= \frac{n}{t}\ \frac{\alpha^n}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\alpha t}\ t^{n-1} \\ &= \frac{n\,\alpha\,\alpha^{n-1}}{(n-1)\,(n-2)!}\ \mathrm{e}^{-\alpha t}\ t^{n-2} \\ &= \frac{n}{n-1}\ \alpha\ \frac{\alpha^{n-1}}{(n-2)!}\ \mathrm{e}^{-\alpha t}\ t^{n-2} \\ &= \frac{n}{n-1}\ \alpha\, f_{n-1}(t) \end{aligned}$$
- On reconnaît une densité de probabilité, à multiplication par une constante près.
  Ainsi, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\ f_n(t)\ dt$ est convergente et :
$$\int_{0}^{+\infty} g(t)\ f_n(t)\ dt \ = \ \frac{n}{n-1}\ \alpha\ \underbrace{\int_{0}^{+\infty} f_{n-1}(t)\ dt}_{1} \ = \ \frac{n}{n-1}\ \alpha$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(W_n) = \frac{n}{n-1}\ \alpha.}$$

- Or :
$$\mathbb{E}(W_n) = \frac{n}{n-1}\ \alpha \ \Leftrightarrow\ \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(W_n) = \alpha \ \Leftrightarrow\ \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{n}\ W_n\right) = \alpha \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)}$$
- De plus, la v.a.r. $\dfrac{n-1}{n}\ W_n = \dfrac{n-1}{\cancel{n}}\ \dfrac{\cancel{n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{X_k}{\beta}\right)} = \dfrac{n-1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{X_k}{\beta}\right)}$ s'exprime :
  - × à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la v.a.r. X.
  - × sans mention du paramètre α.

$$\boxed{\frac{n-1}{n}\ W_n \text{ est un estimateur sans biais de } \alpha.}$$

□

d) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$$W'_n = \frac{n-1}{n} W_n.$$

(i) Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

En admettant que le moment d'ordre 2 de W'_n est égal à $\dfrac{(n-1)\alpha^2}{n-2}$, calculer la variance de W'_n puis établir, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que pour tout réel ε strictement positif, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\left[W'_n - \varepsilon < \alpha < W'_n + \varepsilon\right]\right) \geqslant 1 - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2(n-2)}.$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- On suppose que W'_n admet un moment d'ordre 2. Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(W'_n) &= \mathbb{E}({W'_n}^2) - (\mathbb{E}(W'_n))^2 \\ &= \frac{(n-1)\ \alpha^2}{n-2} - \alpha^2 \\ &= \frac{(n-1)\ \alpha^2 - (n-2)\ \alpha^2}{n-2} = \frac{\alpha^2}{n-2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(W'_n) = \frac{\alpha^2}{n-2}}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Comme W'_n admet un moment d'ordre 2, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer :

$$\begin{array}{lrcl} & \mathbb{P}(|W'_n - \mathbb{E}(W'_n)| \geqslant \varepsilon) & \leqslant & \frac{\frac{\alpha^2}{n-2}}{\varepsilon^2} \\ \text{d'où} & -\mathbb{P}(|W'_n - \alpha| \geqslant \varepsilon) & \geqslant & -\dfrac{\alpha^2}{(n-2)\ \varepsilon^2} \\ \text{et} & 1 - \mathbb{P}(|W'_n - \alpha| \geqslant \varepsilon) & \geqslant & 1 - \dfrac{\alpha^2}{(n-2)\ \varepsilon^2} \\ \text{ainsi} & \mathbb{P}(|W'_n - \alpha| < \varepsilon) & \geqslant & 1 - \dfrac{\alpha^2}{(n-2)\ \varepsilon^2} \end{array}$$ *(probabilité de l'événement contraire)*

Enfin, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$|W'_n(\omega) - \alpha| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ -\varepsilon < W'_n(\omega) - \alpha < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ W'_n(\omega) - \varepsilon < \alpha < W'_n(\omega) - \varepsilon$$

Ainsi : $[|W'_n - \alpha| < \varepsilon] = [W'_n - \varepsilon < \alpha < W'_n - \varepsilon]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}\left([W'_n - \varepsilon < \alpha < W'_n + \varepsilon]\right) \geqslant 1 - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2(n-2)}.}$$

□

(ii) On suppose dans cette question (et elle seule) que α est strictement compris entre 1 et 2. Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $\left[W'_n - \frac{1}{10}\ ,\ W'_n + \frac{1}{10}\right]$ soit un intervalle de confiance du paramètre réel α au niveau de confiance 0,95.

Démonstration.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $1 < \alpha < 2$. On considère $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$. D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\left(\left[W'_n - \frac{1}{10} < \alpha < W'_n + \frac{1}{10}\right]\right) \geqslant 1 - \frac{\alpha^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 (n-2)}$$

- Pour que $\left[W'_n - \dfrac{1}{10}, W'_n + \dfrac{1}{10}\right]$ soit un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$, il suffit de choisir n tel que :

$$\begin{array}{rrcl} & 1 - \dfrac{\alpha^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 (n-2)} & \geqslant & 0,95 \\ \Leftrightarrow & 0,05 & \geqslant & \dfrac{\alpha^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 (n-2)} \\ \Leftrightarrow & 0,05\ (n-2) & \geqslant & 10^2\ \alpha^2 \\ \Leftrightarrow & n-2 & \geqslant & \dfrac{10^2}{0,05}\ \alpha^2 \\ \Leftrightarrow & n & \geqslant & \dfrac{10^2}{0,05}\ \alpha^2 + 2 \end{array}$$

De plus, comme $\alpha < 2$:

$$\frac{10^2}{0,05}\ \alpha^2 + 2 = \frac{10^2}{\frac{5}{100}}\ \alpha^2 + 2 = \frac{10^4}{5}\ \alpha^2 + 2 \quad < \quad \frac{4 \times 10^4}{5} + 2 = 4 \times 2 \times 10^3 + 2 = 8002$$

Donc, par transitivité, si $n \geqslant 8002$, alors $n \geqslant \dfrac{10^2}{0,05}\ \alpha^2 + 2$.

D'où : $1 - \dfrac{\alpha^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 (n-2)} \ \geqslant\ 0,95$

Pour tout $n \geqslant 8002$, $\left[W'_n - \dfrac{1}{10}, W'_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$.

□

8. On suppose maintenant que seul le paramètre α est déjà identifié et qu'il vérifie : $\alpha > 2$.

a) Pour tout entier strictement positif n, on pose :

$$Y_n = c_n \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

où le réel c_n est choisi de sorte que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ soit un estimateur sans biais de β.

(i) Calculer c_n.

Démonstration.
La v.a.r. Y_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(c_n \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = c_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = c_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_1) = c_n\, n\, \mathbb{E}(X_1)$$

Enfin, d'après la question ***II.1***, $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{\alpha\,\beta}{\alpha - 1}$ et ainsi : $\mathbb{E}(Y_n) = c_n\, n\, \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\, \beta$.

$$\boxed{\text{En choisissant } c_n = \frac{\alpha - 1}{\alpha\, n}, \text{ on obtient } \mathbb{E}(Y_n) = \beta.}$$

□

(ii) Quelle est la limite de la variance de Y_n quand n tend vers $+\infty$?
(On dit que l'estimateur est convergent.)

Démonstration.
La v.a.r. Y_n admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes qui admettent des variances. De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(Y_n) & = & \mathbb{V}(c_n \sum\limits_{k=1}^{n} X_k) \;=\; c_n^2\, \mathbb{V}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) & \textit{(par propriété de la variance)} \\
& = & c_n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
& = & c_n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X) \;=\; c_n^2\, n\, \mathbb{V}(X) & \\
& = & \dfrac{\cancel{(\alpha - 1)^2}}{\alpha^{\cancel{2}}\, n^{\cancel{2}}}\, \cancel{n}\, \dfrac{\cancel{\alpha}\, \beta^2}{\cancel{(\alpha - 1)^2}\, (\alpha - 2)} & \\
& = & \dfrac{\beta^2}{\alpha\,(\alpha - 2)}\, \dfrac{1}{n} & \\
& \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} & 0 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}(Y_n) = 0.}$$

□

b) Pour tout entier strictement positif n, on pose : $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(i) Déterminer la fonction de répartition de Z_n, puis reconnaître sa loi et préciser son espérance. Quelle est la limite de cette dernière quand n tend vers $+\infty$?

Démonstration.

- On a déjà considéré, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $X_k(\Omega) \subset [\beta, +\infty[$.
  On en déduit : $Z_n(\Omega) \subset [\beta, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

  × si $x < \beta$, alors $[Z_n \leqslant x] = \varnothing$ car $Z_n(\Omega) \subset [\beta, +\infty[$. Donc :

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x \geqslant \beta$ alors :

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) \\
&= 1 - \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) > x]) \\
&= 1 - \mathbb{P}([X_1 > x] \ \cap \ \dots \ \cap \ [X_n > x]) \\
&= 1 - \mathbb{P}([X_1 > x]) \ \times \ \dots \ \times \ \mathbb{P}([X_n > x]) && \textit{(par indépendance de } X_1, \dots, X_n\textit{)} \\
&= 1 - \mathbb{P}([X_1 > x]) \ \times \ \dots \ \times \ \mathbb{P}([X_1 > x]) && \textit{(car } X_1, \dots, X_n \textit{ ont toutes même loi que } X\textit{)} \\
&= 1 - (\mathbb{P}([X_1 > x]))^n \\
&= 1 - \left(\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha\right)^n = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha n} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{II.2.}} \textit{ et car } x \geqslant \beta\textit{)}
\end{aligned}$$

On reconnaît (d'après ***II.2.***) la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi de Pareto de paramètres αn et β.

Ainsi, Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{\alpha n\, \beta}{\alpha n - 1}$ (d'après ***II.1.***)

- Enfin, comme $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{\alpha n\, \beta}{\alpha n - 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\cancel{\alpha n}\, \beta}{\cancel{\alpha n}} = \beta \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \beta$$

En conclusion : $\mathbb{E}(Z_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \beta$.
L'estimateur Z_n est donc asymptotiquement sans biais.

□

(ii) Pour tout entier strictement positif n, on pose : $Z'_n = d_n Z_n$, où le réel d_n est choisi de telle sorte que $(Z'_n)_{n \geqslant 1}$ soit un estimateur sans biais de β.
Quelle est la limite de la variance de Z'_n quand n tend vers $+\infty$?

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{\alpha n\, \beta}{\alpha n - 1}$. Or :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{\alpha n\, \beta}{\alpha n - 1} \ \Leftrightarrow \ \frac{\alpha n - 1}{\alpha n} \mathbb{E}(Z_n) = \beta \ \Leftrightarrow \ \mathbb{E}\left(\frac{\alpha n - 1}{\alpha n} \ Z_n\right) = \beta \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)}$$

Donc $Z'_n = \dfrac{n\alpha - 1}{n\alpha} Z_n$ est un estimateur sans biais de β ($d_n = \dfrac{\alpha n - 1}{\alpha n}$).

- La v.a.r. $Z'_n = d_n \, Z_n$ admet une variance en tant que transformée affine de Z_n, et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z'_n) &= \mathbb{V}(d_n\, Z_n) = d_n^2\, \mathbb{V}(Z_n) = \frac{\cancel{(n\alpha - 1)^2}}{(n\alpha)^{\cancel{2}}} \ \frac{\cancel{n\alpha}\ \beta^2}{(n\alpha - 2)\ \cancel{(n\alpha - 1)^2}} \\
&= \frac{1}{n\alpha\,(n\alpha - 2)}\, \beta^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$\mathbb{V}(Z'_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

□

(iii) Démontrer que l'estimateur $(Z'_n)_{n\geqslant 1}$ est plus efficace que l'estimateur $(Y_n)_{n\geqslant 1}$, c'est-à-dire, qu'à partir d'un certain rang, la variance de Z'_n est inférieure à celle de Y_n.

Démonstration.
Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{cccccl}
& \mathbb{V}(Z'_n) & \leqslant & \mathbb{V}(Y_n) & & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\beta^2}{n\alpha\,(n\alpha-2)} & \leqslant & \dfrac{\beta^2}{\alpha\,(\alpha-2)}\,\dfrac{1}{n} & & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{n\alpha-2} & \leqslant & \dfrac{1}{\alpha-2} & & \textit{(car } \dfrac{\beta^2}{n\alpha} > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & n\alpha-2 & \geqslant & \alpha-2 & & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow & n\alpha & \geqslant & \alpha & & \\
\Leftrightarrow & n & \geqslant & 1 & & \textit{(car } \alpha > 0\textit{)}
\end{array}$$

> À partir du rang $n = 1$, $\mathbb{V}(Z'_n) \leqslant \mathbb{V}(Y_n)$ et l'estimateur Z'_n est donc plus efficace que l'estimateur Y_n.

□

Commentaire

- La loi présentée dans la question ***II.2.b)*** est appelée loi d'Erlang (hors programme) de paramètres n et λ. Cette loi est liée à des lois de probabilité classiques :
  - × lorsque $n = 1$ (*cf* initialisation de la récurrence du ***II.2.b)***), on reconnaît la loi exponentielle de paramètre λ.
  - × de manière générale, la loi d'Erlang est un cas spécial de la loi Gamma (qui admet deux paramètres notés généralement α et β) dont une densité est donnée par :

$$t \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\ \mathrm{e}^{-\beta t}\ t^{\alpha-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{array}\right.$$

  En prenant $\alpha = n$, on reconnaît la densité f_n de la question de l'énoncé.
- Cette loi Gamma se définit à l'aide de la fonction :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

  que l'on peut rencontrer par exemple dans `ESSEC II 2005`.
  Pour rappel, la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on peut démontrer (penser à une IPP) :

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma(1) = 1 \\ \forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \end{array}\right.$$

  de sorte que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \Gamma(n+1) = n!$.
  (on peut voir la fonction Γ comme un prolongement de la fonction factorielle)
- La loi de Pareto est elle aussi très classique aux concours. Elle est elle aussi reliée à la loi exponentielle (c'était l'objet de la question ***II.4.***).

Commentaire

Enfin, la partie estimation portait sur l'estimateur du maximum de vraisemblance.
Détaillons ce point.

- On dispose d'un échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ d'observations.
- On suppose que ces observations proviennent d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une v.a.r. X dont la loi dépend d'un paramètre α, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur de α qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance.
- Le réel w est précisément la valeur du paramètre α maximisant la réalisation des observations initiales.
- La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la variable aléatoire construite à l'aide de ce maximum : W_n.
- Plaçons-nous dans le cas où X est une v.a.r. discrète (la méthode est plus simple à appréhender dans ce cas). L'idée est de choisir comme estimation de α le réel w tel que la **vraisemblance** d'avoir obtenu l'échantillon utilisé soit maximisée.
  Autrement dit, le réel w tel que la probabilité :
  $$\begin{aligned} \mathcal{L}(a) &= \mathbb{P}_a([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_n = x_n]) \\ &= \mathbb{P}_a([X_1 = x_1]) \times \ldots \times \mathbb{P}([X_n = x_n]) \qquad \textit{(par indépendance de } X_1,\ \ldots,\ X_n\textit{)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_a([X_i = x_i]) \end{aligned}$$
  soit maximale. L'énoncé portait sur le cas de v.a.r. à densité, que l'on comprend aisément par analogie avec le cas des v.a.r. discrètes.