DS9

Problème

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in \,]-\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.

Démonstration.
La fonction φ est continue :

- sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]-\infty, 1[$.
  Notons que la fonction $g : x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty, 1[$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto 1 - x$ qui est :
    - continue sur $]-\infty, 1[$,
    - telle que : $g_1(]-\infty, 1[) \subset]0, +\infty[$.
  - × $g_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est continue sur $]0, +\infty[$.
- en 1. En effet :
  - × d'une part, avec le changement de variable $u = 1 - x$:

    $$\lim_{x\to 1} (1-x)\ln(1-x) \;=\; \lim_{u\to 0} u\ln(u) \;=\; 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

    D'où : $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = 1 + 0 = 1$.
  - × d'autre part : $\varphi(1) = 1$.

  On obtient bien : $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = \varphi(1)$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est donc continue sur }]-\infty, 1].}$$

□

2. a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in \,]-\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

Démonstration.

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.
- Soit $x \in \,]-\infty, 1[$.

$$\varphi'(x) \;=\; 1 + (-1)\times\ln(1-x) + (1-x)\times\left(-\frac{1}{1-x}\right) \;=\; \cancel{1} - \ln(1-x) - \cancel{1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \varphi' : x \mapsto -\ln(1-x).}$$

□

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

Démonstration.

- Soit $x \in\,]-\infty, 1[$.

$$\begin{array}{rcll} \varphi'(x) > 0 & \Leftrightarrow & -\ln(1-x) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(1-x) < 0 & \\ & \Leftrightarrow & 1 - x < \mathrm{e}^0 = 1 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}) \\ & \Leftrightarrow & 0 < x & \end{array}$$

- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		1
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Détaillons le calcul de $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) \;=\; 0 + (1-0)\ln(1-0) \;=\; \ln(1) \;=\; 0$$

□

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

Démonstration.
Soit $x \in\,]-\infty, 1[$.

$$\begin{array}{rcl} \tau_1(\varphi)(x) & = & \dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} \\[2ex] & = & \dfrac{x + (1-x)\ln(1-x) - 1}{x-1} \\[2ex] & = & \dfrac{x - 1 - (x-1)\ln(1-x)}{x-1} \\[2ex] & = & \dfrac{\cancel{(x-1)}\,\big(1 - \ln(1-x)\big)}{\cancel{x-1}} \\[2ex] & = & 1 - \ln(1-x) \end{array}$$

Or, avec le changement de variable $u = 1 - x$:

$$\lim_{x \to 1} 1 - \ln(1-x) \;=\; \lim_{u \to 0} 1 - \ln(u) \;=\; +\infty$$

La fonction taux d'accroissement $\tau_1(\varphi)$ n'admet donc pas de limite finie en 1.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } \varphi \text{ n'est pas dérivable en } 1.}$$

□

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & x + (1-x)\ \ln(1-x) \\ & = & x + \ln(1-x) - x\ \ln(1-x) \\ & = & x\ \ln(1-x)\ \left(\dfrac{1}{\ln(1-x)} + \dfrac{1}{x} - 1\right) \end{array}$$

(la mise en facteur est licite car, comme $x < 0$: $x\ \ln(1-x) \neq 0$)

Or :

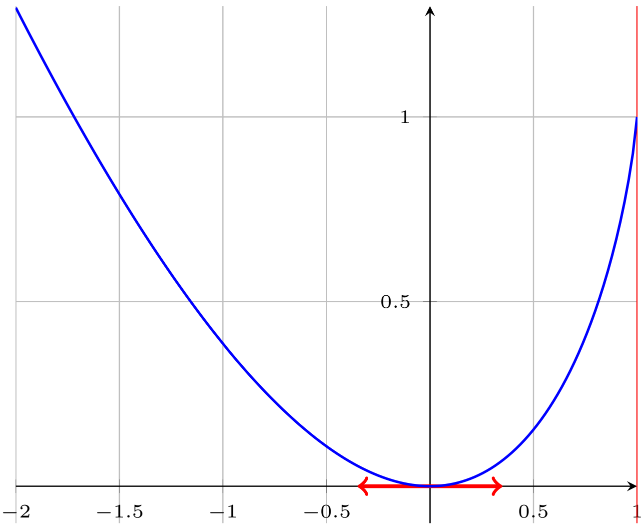
- avec le changement de variable $u = 1 - x$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1-x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \ln(u) = +\infty$.
  D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\ln(1-x)} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ \ln(1-x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

□

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

Démonstration.



Commentaire

- D'après la question ***2.c)*** : $\lim\limits_{x \to 1} \tau_1(\varphi)(x) = +\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est tangente à la courbe représentative de φ en 1.
- Comme la fonction φ est seulement définie à gauche de 1, il s'agit même d'une demi-tangente en 1.

□

5. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ converge et calculer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t\ \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ est donc uniquement impropre en 0.

- Soit $A \in\ ]0,1]$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) & = & t & & v(t) & = & \dfrac{1}{2}\ t^2 \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A,1]$.
  On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_A^1 t\ \ln(t)\ dt & = & \left[\ \dfrac{1}{2}\ t^2\ \ln(t)\ \right]_A^1 - \displaystyle\int_A^1 \dfrac{1}{t} \times \dfrac{1}{2}\ t^2\ dt \\[2ex] & = & \dfrac{1}{2}\ \big(\cancel{1^2\ \ln(1)} - A^2\ \ln(A)\big) - \dfrac{1}{2}\ \displaystyle\int_A^1 t\ dt \\[2ex] & = & -\dfrac{1}{2}\ A^2\ \ln(A) - \dfrac{1}{2}\ \left[\ \dfrac{1}{2}\ t^2\ \right]_A^1 \\[2ex] & = & -\dfrac{1}{2}\ A^2\ \ln(A) - \dfrac{1}{4}\ (1 - A^2) \end{array}$$

- On sait de plus :
  × d'une part, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^2\ \ln(A) = 0$,
  × d'autre part : $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^2 = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt \text{ est convergente et :} \\[2ex] \displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt = -\dfrac{1}{2} \times 0 - \dfrac{1}{4}\ (1-0) = -\dfrac{1}{4}. \end{array}}$$

□

b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\ dx\ =\ \frac{1}{4}$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la fonction φ est continue sur le segment $[0,1]$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\ dt$ est donc bien définie.

- On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(t)\ dt &= \int_0^1 t+(1-t)\ \ln(1-t)\ dt \\ &= \int_0^1 t\ dt + \int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\ dt\end{aligned}$$

Notons qu'on peut bien appliquer la linéarité de l'intégrale car les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^1 t\ dt$ sont convergentes, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\ dt$ est bien convergente.

- Tout d'abord :

$$\int_0^1 t\ dt = \left[\frac{1}{2}\ t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ (1^2-0^2) = \frac{1}{2}$$

- Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\ dt$ (dont on sait qu'elle est convergente), on effectue le changement de variable $\boxed{u = 1-t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1-t \quad \text{(et donc } t = 1-u\text{)} \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On obtient alors :

$$\int_0^1 (1-t)\ \ln(1-t)\ dt = \int_1^0 u\ \ln(u)\ (-\ du) = \int_0^1 u\ \ln(u)\ du = -\frac{1}{4}$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^1 \varphi(t)\ dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variable affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a bien fait en premier lieu).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

6. a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k \; = \; \dfrac{t^n}{1-t}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0,x]$. Comme $t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k \; = \; \frac{1-t^n}{1-t} \; = \; \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \, \forall t \in [0,x], \, \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}.}$$

□

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} \; = \; \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t} \, dt$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité de la question précédente entre 0 et x. On obtient :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt \; = \; \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt$$

Étudions le membre de gauche. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt \; &= \; \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^x t^k \, dt \right) \\
&= \; \Big[-\ln(1-t) \Big]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{k+1} \, t^{k+1} \right]_0^x \\
&= \; -\ln(1-x) + \cancel{\ln(1-0)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \left(x^{k+1} - 0^{k+1} \right) \\
&= \; -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \; -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \, -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \; = \; \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \, dt.}$$

□

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{array}{lccccc l}
\text{Alors} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & x & \\
\text{donc} & 0 & \geqslant & -t & \geqslant & -x & \\
\text{d'où} & 1 & \geqslant & 1-t & \geqslant & 1-x & \\
\text{alors} & 1 & \leqslant & \dfrac{1}{1-t} & \leqslant & \dfrac{1}{1-x} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & t^n & \leqslant & \dfrac{t^n}{1-t} & \leqslant & \dfrac{t^n}{1-x} & \textit{(car } t^n \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Par transitivité : } \forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}.}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt$$

Or :

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{n+1}\,t^{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On obtient :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

- De plus :

$$\begin{array}{lccc l}
 & x & < & 1 & \\
\text{donc} & x^{n+1} & \leqslant & 1 & \textit{(par croissance de } t \mapsto t^{n+1} \textit{ sur } \mathbb{R}_+ \textit{ (car } x \geqslant 0\textit{))} \\
\text{d'où} & \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} & \leqslant & \dfrac{1}{(n+1)(1-x)} & \textit{(car } (n+1)(1-x) > 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut, par transitivité : } 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}}$$

Commentaire

- Le schéma de résolution de cette question est plutôt classique.
  Afin d'encadrer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$:
  1) on cherche d'abord à encadrer l'intégrande, c'est-à- dire montrer :
  $$\forall t \in [a, b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
  où m et M sont deux réels à déterminer grâce à l'étude de la fonction f,
  2) on utilise ensuite la croissance de l'intégration (si les bornes a et b sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $a \leqslant b$) pour conclure :
  $$m(b-a) = \int_a^b m\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b M\ dt = M(b-a)$$
- L'idée à retenir est que pour encadrer une intégrale, on commence systématiquement par encadrer l'intégrande.

- On remarque alors :
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\,(1-x)} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt = 0.}$$

□

8. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \ = \ -\ln(1-x)$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \ = \ -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt$$
  Or, d'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt = 0$. On en déduit que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et :
  $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \ = \ -\ln(1-x) + 0$$
- Par ailleurs, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} \text{ est convergente et : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).}$$

□

9. a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{n\,(n+1)} \ = \ \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{cl}
 & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} \ = \ \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} \ = \ \dfrac{a\,(n+1) + b\,n}{n\,(n+1)} \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \ = \ a\,(n+1) + b\,n \\[1ex]
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \ = \ a + (a+b)\,n \\[1ex]
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccc} a & & & = & 1 \\ a & + & b & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(par identification)} \\[2ex]
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{cccc} a & & = & 1 \\ & b & = & -1 \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, en choisissant } a = 1 \text{ et } b = -1, \text{ on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}.}$$

Commentaire

- Détaillons l'étape d'identification.
On introduit pour cela le polynôme Q défini par : $Q(X) = (a-1) + (a+b)\,X$. Alors :

$$\begin{array}{cl}
 & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = a + (a+b)\,n \\[1ex]
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 = (a-1) + (a+b)\,n \\[1ex]
\Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 = Q(n) \\[1ex]
\Leftrightarrow & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'entier } n \text{ est racine de } Q
\end{array}$$

Or Q est un polynôme de degré 1. D'où :

$$Q \text{ admet une infinité de racines} \quad \Leftrightarrow \quad Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

Précisons que, comme Q est de degré 1, on a même :

$$Q \text{ admet au moins 2 racines} \quad \Leftrightarrow \quad Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

Ainsi :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'entier } n \text{ est racine de } Q \quad \Leftrightarrow \quad Q = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} a & & & = & 1 \\ a & + & b & = & 0 \end{array} \right.$$

- Notons que l'on pouvait effectuer la recherche de a et b au brouillon et se contenter de fournir la réponse obtenue sur la copie, sans détails. D'autant plus qu'il s'agit presque ici d'une question de cours puisque la décomposition demandée est utilisé de manière classique pour faire apparaître une somme télescopique (ce que l'on fera dans les questions suivantes). $\square$

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \; = \; \varphi(x)$.

Démonstration.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} x^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.a)}}\\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1}\\
&= x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1}\\
&= x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{x^{n}}{n} && \textit{(par décalage d'indice)}\\
&= x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^{n}}{n} - \frac{x^1}{1} \right)\\
&= x + x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^{n}}{n}
\end{aligned}$$

- Or, d'après la question ***8.***, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \text{ est convergente.}}$$

- De plus, toujours d'après la question ***8.*** :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \; = \; x + x \times \big(-\ln(1-x) \big) - \big(-\ln(1-x) \big)$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} = x + (1-x)\,\ln(1-x) = \varphi(x).}$$

□

10. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\,(n+1)} \; = \; \varphi(1)$.

Démonstration.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)}\\
&= 1 - \frac{1}{N+1} && \textit{(par télescopage)}\\
&\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ est convergente et : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1 = \varphi(1).}$$

□

Partie C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

11. a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}\big([N=n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\begin{array}{lcl} B_k & : & \text{« on obtient une boule bleue au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »} \\ R_k & : & \text{« on obtient une boule rouge au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »} \end{array}$$

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
L'événement $[N=n]$ est réalisé si et seulement si lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient n boules, c'est-à-dire $n-1$ boules bleues et 1 boules rouges. Autrement dit, $[N=n]$ est réalisé si et seulement si, lorsque l'expérience s'arrête on a ajouté $n-1-1 = n-2$ boules bleues dans l'urne, c'est-à-dire si et seulement si on a pioché $n-2$ boules bleues puis la boule rouge.
Ainsi :

$$[N=n] \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$$

On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([N=n]\big) \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}\big) \\ = & \mathbb{P}(B_1) \ \times \ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \ \times \ \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \ \times \cdots \times \ \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \ \times \ \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) \\ = & \dfrac{1}{2} \ \times \ \dfrac{2}{3} \ \times \ \dfrac{3}{4} \ \times \cdots \times \ \dfrac{n-2}{n-1} \ \times \ \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

× $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) = \dfrac{1}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.

Plus précisément, si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}$ est réalisé, c'est que les $n-2$ permiers tirages ont donné une boule bleue.

Dans ce cas, l'événement R_{n-1} est réalisé si et seulement si lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage la boule rouge est tirée dans l'urne contenant n boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([N=n]\big) \ = \ \frac{1}{(n-1)\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \mathbb{P}\big([N=n]\big) \ = \ \dfrac{1}{n\,(n-1)}.}$$

□

b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N} n\,\mathbb{P}([N=n]) &= \sum_{n=2}^{N} \cancel{n}\, \frac{1}{\cancel{n}(n-1)} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} && \textit{(par décalage d'indice)} \end{aligned}$$

- Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.

  Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est divergente.

  On en déduit que la v.a.r. N n'admet pas d'espérance.

□

12. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
def simuleN():
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.random() < .........
        b = b+1
    return .........
```

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante.

```
def simuleN():
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.random() < b/(b+1)
        b = b+1
    return b+1
```

□

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes.
On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$, ce qui signifie :

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \ = \ \max\left(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\right)$$

Ainsi par exemple, si N prend la valeur 3, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$; si N prend la valeur 5, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$; etc.

Commentaire

- L'énoncé prend ici le temps de détailler précisément et rigoureusement la définition de la v.a.r. T :
$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$$
On peut regretter que cette rigueur ne se prolonge pas aux exemples proposés. En effet, l'écriture $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ ne convient pas car elle confond une variable aléatoire et sa réalisation.
  × Une première manière d'écrire les choses est la suivante.
  Si N prend la valeur 3, alors la valeur prise par T est la valeur prise par $\max(X_1, X_2, X_3)$ (qui est d'ailleurs le maximum des valeurs prises par les v.a.r. X_1, X_2 et X_3).
  × Plus précisément, dire que N prend la valeur 3, c'est dire qu'il existe un tirage $\omega \in \Omega$ tel que : $N(\omega) = 3$. Pour ce tirage ω particulier :
$$T(\omega) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \ldots, X_3(\omega)\big)$$
  On ne peut par contre en aucun cas écrire l'égalité entre **variables aléatoires** : $T \ \cancel{=} \ \max(X_1, X_2, X_3)$.
- L'intuition derrière la définition de la v.a.r. T est que la valeur de T dépend de la valeur de N. Ainsi, pour connaître la valeur prise par T, il faut passer en revu toutes les valeurs prises par N. Cette disjonction de cas sur les valeurs de N est d'ailleurs amorcée dans l'énoncé (« si N prend la valeur 3, ... »). Nous sommes donc ici dans un contexte où :
  × on souhaite déterminer la probabilité qu'une v.a.r. prenne certaines valeurs (la v.a.r. T ici),
  × ces valeurs dépendent de celles prises par une autre v.a.r. (la v.a.r. N ici).
  Dans ce contexte, le réflexe à adopter est l'utilisation de la formule des probabilités totales (et même de l'appliquer au système complet d'événements associé à N). C'est d'ailleurs exactement ce qui est attendu en question ***13.b)***.

13. a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}_{[N=n]}\big(\,[T \leqslant x]\,\big) \ = \ \big(F(x)\big)^n$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

- Notons tout d'abord que la probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x])$ est bien définie car, d'après la question ***11.a)*** : $\mathbb{P}([N = n]) \neq 0$.

- Ensuite :

$$\mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x]) = \frac{\mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x])}{\mathbb{P}([N=n])}$$

- Déterminons alors $\mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x])$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x]) &= \mathbb{P}([N=n] \cap [\max(X_1, \dots, X_N) \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([N=n] \cap [\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\left([N=n] \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right)\right) \\
&= \mathbb{P}([N=n]) \times \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant x])\right) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ et } N \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \mathbb{P}([N=n]) \times \left(\prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x)\right) \\
&= \mathbb{P}([N=n]) \times \big(F(x)\big)^n && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x]) &= \frac{\mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x])}{\mathbb{P}([N=n])} \\
&= \frac{\cancel{\mathbb{P}([N=n])} \times \big(F(x)\big)^n}{\cancel{\mathbb{P}([N=n])}} \\
&= \big(F(x)\big)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x]) = \big(F(x)\big)^n}$$

□

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big([T \leqslant x]\big) = \varphi\big(F(x)\big)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La famille $\big([N=n] \big)_{n \geqslant 2}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T \leqslant x]) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n] \cap [T \leqslant x]) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n]) \times \big(F(x)\big)^n && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} \big(F(x)\big)^n && \textit{(d'après } \textbf{\textit{11.a)}}\textit{)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(F(x)\big)^{n+1}}{(n+1)\,n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \varphi\big(F(x)\big) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.}} \textit{ et } \textbf{\textit{10.}}\textit{, car, comme } F \textit{ est une fonction de répartition : } F(x) \in [0,1]\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([T \leqslant x]) = \varphi\big(F(x)\big)}$$

□

14. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) On rappelle que l'instruction `rd.random(d)` renvoie un tableau de taille `d` où les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

Écrire une fonction **Python** nommée `simuleT()` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T.

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante.

```
1  def simuleT():
2      N = simuleN()
3      Tab = rd.random(N)
4      return max(Tab)
```

□

b)

c) On considère la fonction **Python** suivante :

```
1  def mystere():
2      m = np.zeros(3)
3      for k in range(3):
4          s = np.zeros(1000)
5          for j in range(1000):
6              s[j] = simuleT()
7          m[k] = np.mean(s)
8      return m
```

À son appel, on obtient :

```
ans  =
      0.7474646     0.7577248     0.7470916
```

Que renvoie la fonction `mystere` ? Que peut-on conjecturer sur la variable aléatoire T ?

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `mystere`,
  × elle ne prend pas de paramètre en entrée,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `m`.

  En ligne 2, on commence par initialiser la variable `m` par un vecteur ligne à 3 colonnes nul.

```
2      m = np.zeros(3)
```

- **Structure itérative**
  × Les lignes 3 à 7 permettent de mettre à jour chaque coordonnée du vecteur `m`. Pour cela on utilise une structure itérative (boucle for).

```
3        for k in range(3):
```

× En ligne 4, on initialise la variable `s` par un vecteur ligne à 1000 colonnes nul.

```
4            s = np.zeros(1000)
```

× $2^{\text{ème}}$ structure itérative
Les lignes 5 à 6 permettent de mettre à jour chaque coordonnée du vecteur `s` afin qu'elles contiennent une simulation de la v.a.r. T. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for) et on utilise la fonction `simuleT` définie en question précédente pour obtenir des simulations de la v.a.r. T.

```
5            for j in range(1000):
6                s[j] = simuleT()
```

× À l'issue de cette $2^{\text{ème}}$ boucle for, la variable `s` contient 1000 simulations de la v.a.r. T. L'appel `np.mean(s)` renvoie alors la moyenne des 1000 simulations de T. On stocke ce résultat dans une coordonnée du vecteur `m`.

```
8            m[k] = np.mean(s)
```

- **Fin de la fonction**
À l'issue de la $1^{\text{ère}}$ boucle for, la variable `m` contient dans chaque coordonnée la moyenne de 1000 simulations de la v.a.r. T.

En notant $(T_1, \dots, T_{1000})$ un 1000-échantillon de la v.a.r. T, la fonction `mystere` renvoie un vecteur ligne à 3 coordonnées contenant chacune une simulation de
$$\bar{T}_{1000} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} T_i.$$

- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 1000$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. T. Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(t_1, \dots, t_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(T_1, \dots, T_N)$ de la v.a.r. T.
  (les v.a.r. T_i sont indépendantes et de même loi que T)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :
$$\text{moyenne de l'observation} \ = \ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \ \simeq \ \mathbb{E}(T)$$

- Les valeurs renvoyées par la fonction `mystere` sont donc des approximations de $\mathbb{E}(T)$.

On conjecture alors : $\mathbb{E}(T) \approx \dfrac{3}{4}$.

☐

d) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big([T \leqslant x] \big) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [0,1]$.

Ainsi : $T(\Omega) \subset [0,1]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  - $\times$ si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset [0,1]$). D'où :

$$F_T(x) \;=\; \mathbb{P}([T \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  - $\times$ si $x \in [0,1]$, alors, d'après la question ***13.b)*** :

$$\begin{aligned} F_T(x) \;=\; \mathbb{P}([T \leqslant x]) \;&=\; \varphi\big(F(x)\big) \\ &=\; \varphi(x) \qquad \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \textit{ et } x \in [0,1]\textit{)} \end{aligned}$$

  - $\times$ si $x \in \,]1, +\infty[$, alors $[T \leqslant x] = \Omega$ (car $T(\Omega) \subset [0,1]$). D'où :

$$F_T(x) \;=\; \mathbb{P}([T \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;=\; 1$$

On obtient :

$$F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Comme $\varphi(1) = 1$, on en déduit : $F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Commentaire

- Profitons-en pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
  Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq\ ]-\infty, +\infty[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble des valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on se permet d'écrire :

  « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0,1]$. »

  × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
  On se permet alors d'écrire :

  « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient par une disjonction de cas).

$\square$

e) En déduire que T est une variable aléatoire à densité.

Démonstration.

- La fonction F_T est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, 1[$ car, d'après la question ***1.***, la fonction φ est continue sur $]0, 1[$,
  - × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = 0$ (par définition de F_T),
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_T(x) = F_T(0) = \varphi(0) = 0$ (d'après ***2.b)***).

    Ainsi :
    $$\lim_{x \to 0^-} F_T(x) \;=\; F_T(0) \;=\; \lim_{x \to 0^+} F_T(x)$$
  - × en 1. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 1^-} F_T(x) = \varphi(1) = 1$ (par définition de F_T),
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 1^+} F_T(x) = F_T(1) = 1$.

    Ainsi :
    $$\lim_{x \to 1^-} F_T(x) \;=\; F_T(1) \;=\; \lim_{x \to 1^+} F_T(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } F_T \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_T \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 0 et en 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } T \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

□

e) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que T admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. T est une v.a.r. à densité. De plus : $T(\Omega) \subset [0, 1]$. Il existe donc une densité de T nulle en dehors de $[0, 1]$. On la note f_T.
- La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_T(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, f_T(x)\, dx$.
- Tout d'abord, comme la fonction f_T est nulle en dehors de $[0, 1]$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_T(x)\, dx \;=\; \int_0^1 x\, f_T(x)\, dx$$
- De plus, la fonction $x \mapsto x\, f_T(x)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_T(x)\, dx$ est donc impropre à la fois en 0 et en 1.

- Étudions d'abord $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\, dx$. Soit $A \in \,]0, \frac{1}{2}]$.

  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(x) & = & 1 \\[1em] v'(x) & = & f_T(x) & & v(x) & = & F_T(x) \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A, \frac{1}{2}]$ (d'après la question précédente). On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\, dx &= \left[\, x\, F_T(x) \,\right]_A^{\frac{1}{2}} - \int_A^{\frac{1}{2}} F_T(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - A\,\varphi(A) - \int_A^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx \qquad \textit{(par définition de } F_T \textit{ sur }]0,1[\textit{, d'après } \textbf{14.c)}\textit{)} \end{aligned}$$

  Or :

  × d'après ***2.b)*** : $\displaystyle\lim_{A \to 0} A\,\varphi(A) = 0$.

  × d'après ***5.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\, dx$ est convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx$ aussi.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\, dx$ est convergente et :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\, dx = \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx$$

- Étudions ensuite $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x\, f_T(x)\, dx$. Soit $B \in [\frac{1}{2}, 1[$.

  Avec exactement la même intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^B x\, f_T(x)\, dx &= \left[\, x\, F_T(x) \,\right]_{\frac{1}{2}}^B - \int_{\frac{1}{2}}^B F_T(x)\, dx \\ &= B\,\varphi(B) - \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{1}{2}}^B \varphi(x)\, dx \qquad \textit{(par définition de } F_T \textit{ sur }]0,1[\textit{, d'après } \textbf{14.c)}\textit{)} \end{aligned}$$

  Or :

  × d'après ***2.b)*** : $\displaystyle\lim_{B \to 1} B\,\varphi(B) = 1 \times 1 = 1$.

  × d'après ***5.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\, dx$ est convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\, dx$ aussi.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x\, f_T(x)\, dx$ est convergente et :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x\, f_T(x)\, dx = 1 - \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\, dx$$

On en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_T(x)\, dx$ est convergente.

La v.a.r. T admet donc une espérance.

- De plus :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(T) & = & \displaystyle\int_0^1 x\, f_T(x)\ dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\, f_T(x)\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\, f_T(x)\ dx \\ & = & \cancel{\dfrac{1}{2}\,\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)} - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\ dx + 1 - \cancel{\dfrac{1}{2}\,\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\ dx \\ & = & 1 - \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\ dx \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{5.b)}}\text{, on obtient : } \mathbb{E}(T) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.}$$

Commentaire

- Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_T(x)\ dx$ est à la fois impropre en 0 et en 1, on rappelle qu'elle est convergente s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^c x\, f_T(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_c^1 x\, f_T(x)\ dx$ sont toutes deux convergentes. On choisit ici de le démontrer pour $c = \dfrac{1}{2}$.
- L'étude de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\, f_T(x)\ dx$ a donc été effectuée en deux temps. On pouvait néanmoins faire le choix un peu moins rigoureux de se passer de ce découpage et étudier directement l'intégrale $\displaystyle\int_A^B x\, f_T(x)\ dx$ (pour $(A, B) \in \,]0, 1[^2$) avant de faire tendre A vers 0 et B vers 1.

□

15. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Rappeler une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On note } X \text{ une v.a.r. de loi } \mathcal{E}(\lambda)\text{. Alors : } F_X : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array}\right. .}$$

□

b) En déduire une expression de la fonction de répartition de T.

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_T(x) \ = \ \mathbb{P}([T \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \in [0,+\infty[$, alors, d'après la question ***13.b)*** :

$$\begin{array}{rcll} F_T(x) & = & \varphi\big(F(x)\big) & \\ & = & \varphi(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}) & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \\ & & & \textit{et } x \in [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} + \big(1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\big)\,\ln\big(1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\big) & \textit{(par définition de } \varphi\textit{)} \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\ln\big(\mathrm{e}^{-\lambda x}\big) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \\ & = & 1-(1+\lambda\, x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1+\lambda\, x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

□

c) Montrer que T est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de T est la fonction :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- La fonction F_T est continue :
  - × sur $]-\infty,0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0,+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
  - × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x\to 0^-} F_T(x) = 0$ (par définition de F_T),
    - d'autre part : $\lim\limits_{x\to 0^+} F_T(x) = F_T(0) = 1-(1+\lambda\times 0)\,\mathrm{e}^{-\lambda\times 0} = 1-1 = 0$.

    Ainsi :
    $$\lim_{x\to 0^-} F_T(x) \;=\; F_T(0) \;=\; \lim_{x\to 0^+} F_T(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } F_T \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_T \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } T \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_T de T, on dérive sa fonction de répartition F_T sur les intervalles **ouverts** $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × Si $x \in\,]-\infty,0[$, alors :
  $$f_T(x) \;=\; F_T'(x) \;=\; 0$$

× Si $x \in \,]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcl} f_T(x) & = & F_T'(x) \\ & = & -\big(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} + (1+\lambda\,x) \times (-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x})\big) \\ & = & -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} + \lambda\,(1+\lambda\,x)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} \\ & = & \big(-\lambda + \lambda\,(1+\lambda\,x)\big)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} \\ & = & (-\cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} + \lambda^2\,x)\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} \\ & = & \lambda^2\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} \end{array}$$

× On choisit enfin : $f_T(0) = \lambda^2 \times 0 \times \mathrm{e}^{-\lambda \times 0}$.

$$\boxed{\text{Finalement, une densité de } T \text{ est bien la fonction } g : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. .}$$ □

d) Justifier que T admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(T) = \lambda\;\mathbb{E}\big(X_1^2\big)$.
En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g(x)\;dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\,g(x)\;dx$.
- Tout d'abord, comme la fonction g est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g(x)\;dx \;=\; \int_0^{+\infty} x\,g(x)\;dx$$

- Soit $x \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$x\,g(x) \;=\; x \times \lambda^2\,x\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} \;=\; \lambda \times x^2 \times \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} \;=\; \lambda \times x^2 f_{X_1}(x) \qquad \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\lambda)\textit{)}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,f_{X_1}(x)\;dx$ est convergente, car c'est le moment d'ordre 2 de $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\lambda)$ (la v.a.r. X_1 admet une variance, donc un moment d'ordre 2).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,g(x)\;dx \text{ est convergente.} \\ \text{La v.a.r. } T \text{ admet donc une espérance.}\end{array}}$$

- De plus :

$$\mathbb{E}(T) \;=\; \int_0^{+\infty} x\,g(x)\;dx \;=\; \int_0^{+\infty} \lambda \times x^2\,f_{X_1}(x)\;dx \;=\; \lambda\;\int_0^{+\infty} x^2\,f_{X_1}(x)\;dx \;=\; \lambda\,\mathbb{E}(X_1^2)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \lambda\,\mathbb{E}(X_1^2)}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{E}(T) \;=\; \lambda\,\mathbb{E}(X_1^2) \;=\; \lambda\left(\mathbb{V}(X_1) + \big(\mathbb{E}(X_1)\big)^2\right) \;=\; \lambda\left(\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right) \;=\; \lambda \times \frac{2}{\lambda^2} \;=\; \frac{2}{\lambda}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{2}{\lambda}}$$ □

Exercice

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. On note $\varphi_{m,\sigma}$ la densité usuelle de X. Rappeler l'expression de $\varphi_{m,\sigma}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. $\varphi_{m,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ □

2. On considère à partir de maintenant que le paramètre σ est connu mais que le paramètre m est inconnu. On cherche à estimer le paramètre m par la méthode du maximum de vraisemblance.
Soit $n \geqslant 2$ et soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une observation de ce n-échantillon. On définit la fonction de vraisemblance

$$L : a \mapsto \prod_{k=1}^{n} \varphi_{a,\sigma}(x_k)$$

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $L(a)$ puis $\ln(L(a))$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} L(a) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k-a}{\sigma}\right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2}\left(\frac{x_k-a}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(a-x_k)^2} \qquad \textit{(car } (a-x_k)^2 = (x_k-a)^2\textit{)} \end{aligned}$$

(on a changé l'écriture de $(x_k - a)^2$ pour simplifier la dérivation lors de la question qui suit)
Ensuite,

$$\begin{aligned} \ln(L(a)) &= \ln\left(\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(a-x_k)^2 \\ &= -n\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(a-x_k)^2 \end{aligned}$$

□

b) On note $h : a \mapsto \ln(L(a))$. Montrer que la fonction h admet un unique maximum w sur $\mathbb{R}$ et exprimer w en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et n.

Démonstration. La fonction h est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$h'(a) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n} 2(a-x_k) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(a-x_k)$$

donc

$$\begin{aligned} h'(a) \geqslant 0 &\iff -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(a-x_k) \geqslant 0 \\ &\iff \sum_{k=1}^{n}(a-x_k) \leqslant 0 \\ &\iff na - \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 0 \\ &\iff a \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = w \end{aligned}$$

d'où le tableau de variations :

a	$-\infty$		w		$+\infty$
Signe de $h'(a)$		$+$	0	$-$	
Variations de h	$-\infty$	$\nearrow$	$h(w)$	$\searrow$	$-\infty$

et il vient que w est l'unique maximum de h. □

c) Que dire du réel w pour la fonction L ?

Démonstration. Par stricte croissance de la fonction exponentielle, w est également l'unique maximum de la fonction L. □

d) En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre inconnu m.

Démonstration. D'après l'étude précédente, l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre m est :

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

On reconnaît l'estimateur moyenne empirique. □

3. a) On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Démonstration. Les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent toutes une loi normale donc $\overline{X_n}$ suit une loi normale. En particulier, $\overline{X_n}$ admet une espérance et une variance. Le calcul classique du cours donne : $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = m$ et $\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$. D'où $\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. □

b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\left[\overline{X_n} - \varepsilon \leqslant m \leqslant \overline{X_n} + \varepsilon\right]\right) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

Démonstration. La variable aléatoire $\overline{X_n}$ admet une variance donc on peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = m$ et $\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$, donc

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Par passage au complémentaire, on obtient :

$$1 - \mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \leqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

d'où

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \leqslant \varepsilon\right]\right) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Or,

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \leqslant \varepsilon\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\overline{X_n} - \varepsilon \leqslant m \leqslant \overline{X_n} + \varepsilon\right]\right)$$

d'où le résultat. □

c) Déduire de la question précédente un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Démonstration. On résout l'équation d'inconnue ε suivante :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 1 - \alpha &\iff \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = \alpha \\ &\iff \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{n\alpha} \\ &\iff \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}} \qquad \textit{(car } n > 0,\ \alpha > 0,\ \sigma > 0 \textit{ et } \varepsilon > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\left[\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}, \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right]$ est un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1-\alpha$. En effet, $\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}$ et $\overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}$ sont deux estimateurs de m (leur expression ne dépend pas de m, car σ, α et n sont connus). □

d) On note $N(\alpha)$ le plus petit entier naturel n vérifiant : $\frac{\sigma}{\sqrt{\alpha n}} \leqslant 10^{-2}$. Calculer $N(\alpha)$ puis calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} N(\alpha)$.

Démonstration. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha n}} \leqslant 10^{-2} &\iff \sigma 10^2 \leqslant \sqrt{\alpha n} \\ &\iff \sigma^2 10^4 \leqslant \alpha n \qquad \textit{(par croissance stricte de } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}^+\textit{)} \\ &\iff n \geqslant \frac{\sigma^2 10^4}{\alpha} \\ &\iff n \geqslant \left\lceil \frac{\sigma^2 10^4}{\alpha} \right\rceil \qquad \textit{(car } n \textit{ est un entier)} \end{aligned}$$

D'où $N(\alpha) = \left\lceil \frac{\sigma^2 10^4}{\alpha} \right\rceil$. De plus,

- $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sigma^2 10^4}{\alpha} = +\infty$ (car $\alpha > 0$)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \lceil x \rceil = +\infty$

donc par composition de limites, on a $\lim\limits_{\alpha \to 0} N(\alpha) = +\infty$. □