Notons $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ où $y_1, y_2, y_3$ sont trois fonctions inconnues dérivables sur $\mathbb{R}$.

La résolution du système différentiel linéaire $Y' = TY$ se fait par « remontées successives ». En effet,

$$Y' = TY \iff \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{ccccccc} y_1'(t) & = & \lambda_1 y_1(t) & + & a y_2(t) & + & b y_3(t) \\ y_2'(t) & = & & & \lambda_2 y_2(t) & + & c y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & \lambda_3 y_3(t) \end{array} \right.$$

donc on peut résoudre la 3^e^ équation différentielle, puis la 2^e^ après avoir injecté la formule de $y_3(t)$ puis la 1^re^ après avoir injecté les formules de $y_2(t)$ et $y_3(t)$. On est alors amené à résoudre « en cascade » une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène puis deux équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre (dans le cas général). Pour réussir les calculs de manière autonome, il faut en avoir en tête le résultat du cours de première année ci-dessous.

**Proposition 1.** *On considère une équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *à coefficients constants*

$$(E) : y' + ay = b$$

*On suppose que* $b : t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ *où* $\gamma \in \mathbb{R}$ *et* $Q$ *est une fonction polynomiale. Alors il existe une solution particulière de* $(E)$ *qui soit de la forme*

- $t \mapsto R(t)e^{\gamma t}$ *si* $\gamma \neq -a$
- $t \mapsto tR(t)e^{\gamma t}$ *si* $\gamma = -a$

*où* $R$ *est une fonction polynomiale de même degré que* $Q$.

Donnons une version explicite de cette proposition dans deux cas importants que l'on croisera dans la résolution du système $Y' = TY$.

**Proposition 2.** *On considère une équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *à coefficients constants*

$$(E) : y' = \lambda y + ae^{\gamma t}$$

*où* $(a, \lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. *Alors il existe une solution particulière de* $(E)$ *qui soit de la forme*

- $t \mapsto \dfrac{a}{\gamma - \lambda} e^{\gamma t}$ *si* $\gamma \neq \lambda$
- $t \mapsto ate^{\gamma t}$ *si* $\gamma = \lambda$

**Proposition 3.** *On considère une équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *à coefficients constants*

$$(E) : y' = \lambda y + ate^{\gamma t}$$

*où* $(a, \lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. *Alors il existe une solution particulière de* $(E)$ *qui soit de la forme*

- $t \mapsto \left( \dfrac{a}{\gamma - \lambda} t - \dfrac{a}{(\gamma - \lambda)^2} \right) e^{\gamma t}$ *si* $\gamma \neq \lambda$
- $t \mapsto \dfrac{a}{2} t^2 e^{\gamma t}$ *si* $\gamma = \lambda$

On se propose maintenant de calculer explicitement les solutions de $Y' = TY$ dans le cas général. Il faudra effectuer plusieurs disjonctions de cas selon les valeurs propres de la matrice $T$.

- On commence par résoudre $y_3'(t) = \lambda_3 y_3(t)$. Il vient

$$\boxed{y_3(t) = C_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 t}, \qquad \text{où } C_3 \in \mathbb{R}}$$

- On résout ensuite $y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) + cC_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 t}$. D'après la proposition 2, il y a deux cas à distinguer.

  1. Premier cas : $\lambda_2 \neq \lambda_3$.
     Alors la fonction $t \mapsto \dfrac{c}{\lambda_3 - \lambda_2} C_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 t}$ est une solution particulière. Donc

$$\boxed{y_2(t) = C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \frac{c}{\lambda_3 - \lambda_2} C_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 t}, \qquad \text{où } C_2 \in \mathbb{R}}$$

2. <u>Deuxième cas : $\lambda_2 = \lambda_3$.</u>
   Alors la fonction $t \mapsto cC_3te^{\lambda_3 t}$ est une solution particulière. Donc
   $$\boxed{y_2(t) = C_2e^{\lambda_2 t} + cC_3te^{\lambda_3 t}, \qquad \text{où } C_2 \in \mathbb{R}}$$

- Il reste à résoudre l'équation différentielle $(E) : y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + ay_2(t) + by_3(t)$.

1. <u>Premier cas : $\lambda_2 \neq \lambda_3$.</u>
   Alors $(E) \iff y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + aC_2e^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{\lambda_3 - \lambda_2} + b\right)C_3e^{\lambda_3 t}$.
   (a) <u>Premier sous-cas : $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_3$.</u>
   D'après le premier cas de la proposition 2 et le théorème de superposition, la fonction
   $$t \mapsto \frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1}C_2e^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{b}{\lambda_3 - \lambda_1}\right)C_3e^{\lambda_3 t}$$
   est une solution particulière de $(E)$. Donc
   $$\boxed{y_1(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + \frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1}C_2e^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{b}{\lambda_3 - \lambda_1}\right)C_3e^{\lambda_3 t}, \qquad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}}$$
   (b) <u>Deuxième sous-cas : $\lambda_1 = \lambda_2$ (et donc $\lambda_1 \neq \lambda_3$).</u>
   D'après la proposition 2 et le théorème de superposition, la fonction
   $$t \mapsto aC_2te^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{b}{\lambda_3 - \lambda_1}\right)C_3e^{\lambda_3 t}$$
   est une solution particulière de $(E)$. Donc
   $$\boxed{y_1(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + aC_2te^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{b}{\lambda_3 - \lambda_1}\right)C_3e^{\lambda_3 t}, \qquad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}}$$
   (c) <u>Troisième sous-cas : $\lambda_1 = \lambda_3$ (et donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$).</u>
   D'après la proposition 2 et le théorème de superposition, la fonction
   $$t \mapsto \frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1}C_2e^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{\lambda_3 - \lambda_2} + b\right)C_3te^{\lambda_3 t}$$
   est une solution particulière de $(E)$. Donc
   $$\boxed{y_1(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + \frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1}C_2e^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{\lambda_3 - \lambda_2} + b\right)C_3te^{\lambda_3 t}, \qquad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}}$$
2. <u>Deuxième cas : $\lambda_2 = \lambda_3$.</u>
   Alors $(E) \iff y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + aC_2e^{\lambda_2 t} + (act + b)\,C_3e^{\lambda_3 t}$.
   (a) <u>Premier sous-cas : $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (et donc $\lambda_1 \neq \lambda_3$).</u>
   D'après le premier cas des propositions 2 et 3 et d'après le théorème de superposition, la fonction
   $$t \mapsto \frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1}C_2e^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{\lambda_3 - \lambda_1}t + \frac{b(\lambda_3 - \lambda_1) - ac}{(\lambda_3 - \lambda_1)^2}\right)C_3e^{\lambda_3 t}$$
   est une solution particulière de $(E)$. Donc
   $$\boxed{y_1(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + \frac{a}{\lambda_2 - \lambda_1}C_2e^{\lambda_2 t} + \left(\frac{ac}{\lambda_3 - \lambda_1}t + \frac{b(\lambda_3 - \lambda_1) - ac}{(\lambda_3 - \lambda_1)^2}\right)C_3e^{\lambda_3 t}, \qquad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}}$$
   (b) <u>Deuxième sous-cas : $\lambda_1 = \lambda_2$ (et donc $\lambda_1 = \lambda_3$).</u>
   D'après le deuxième cas des propositions 2 et 3 et d'après le théorème de superposition, la fonction
   $$t \mapsto aC_2te^{\lambda_2 t} + t\left(\frac{ac}{2}t + b\right)C_3e^{\lambda_3 t}$$
   est une solution particulière de $(E)$. Donc
   $$\boxed{y_1(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + aC_2te^{\lambda_2 t} + t\left(\frac{ac}{2}t + b\right)C_3e^{\lambda_3 t}, \qquad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}}$$

**Exercice 1 :** Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\left\{\begin{array}{lllll} y_1'(t) & = & -2y_1(t) & + & 2y_2(t) \\ y_2'(t) & = & & - & 2y_2(t) \\ y_3'(t) & = & & & & - & 2y_3(t) \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & + & 2y_2(t) & - & 3y_3(t) \\ y_2'(t) & = & & & 2y_2(t) & - & 2y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & -y_1(t) & + & 3y_2(t) & + & 2y_3(t) \\ y_2'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & - & y_3(t) \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & 3y_1(t) & - & 2y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & - & 2y_2(t) & & \\ y_3'(t) & = & & & & - & y_3(t) \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & - & y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & & y_2(t) & + & 3y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & - & 2y_3(t) \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & & - & 3y_2(t) & - & y_3(t) \\ y_2'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \\ y_3'(t) & = & 0 & & & & \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & -3y_1(t) & - & 2y_2(t) & + & 3y_3(t) \\ y_2'(t) & = & & - & y_2(t) & + & y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & - & y_3(t) \end{array}\right.$

8. $\left\{\begin{array}{lllllll} y_1'(t) & = & 3y_1(t) & + & y_2(t) & + & 3y_3(t) \\ y_2'(t) & = & & & 3y_2(t) & + & 2y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & 3y_3(t) \end{array}\right.$

**Réponses de l'exercice 1 :**
Dans chacun des réponses qui suivent, $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$. A chaque choix du triplet $(C_1, C_2, C_3)$ correspond une unique solution du système différentiel linéaire.

1. $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-2t} + 2C_2 t e^{-2t} \\ y_2(t) = C_2 e^{-2t} \\ y_3(t) = C_3 e^{-2t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{2t} + 2C_2 t e^{2t} - C_3 t(2t+3) e^{2t} \\ y_2(t) = C_2 e^{2t} - 2C_3 t e^{2t} \\ y_3(t) = C_3 e^{2t} \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 - 4C_3 t e^{-t} \\ y_2(t) = C_2 - 2C_3 e^{-t} \\ y_3(t) = C_3 e^{-t} \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{3t} + \frac{2}{5} C_2 e^{-2t} \\ y_2(t) = C_2 e^{-2t} \\ y_3(t) = C_3 e^{-t} \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} - \frac{1}{4} C_3 e^{-2t} \\ y_2(t) = C_2 e^{t} - C_3 e^{-2t} \\ y_3(t) = C_3 e^{-2t} \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1(t) = C_1 - 3C_2 t - C_3 t(3t+1) \\ y_2(t) = C_2 + 2C_3 t \\ y_3(t) = C_3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-t} + C_3(-t+2) e^{-t} \\ y_2(t) = C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t} \\ y_3(t) = C_3 e^{-t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + C_3 t(t+3) e^{3t} \\ y_2(t) = C_2 e^{3t} + 2C_3 t e^{3t} \\ y_3(t) = C_3 e^{3t} \end{cases}$