Algèbre linéaire (matrices) - niveau 1

I. Produit matriciel

Exercice 1

Pour les exemples suivants, dire si les produits matriciels AB et BA sont bien définis ou non. S'ils sont définis, les calculer ; s'ils ne sont pas définis, expliquer pourquoi.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Pour les exemples suivants, calculer A^2 et A^3.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ***2.*** $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ***3.*** $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Commentaire

Notons

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et tout $i \in [\![1, 3]\!]$,
- AC_i est la i^{e} colonne de A
- L_iA est la i^{e} ligne de A

Ceci se généralise aux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour les exemples suivants, déterminer les produits matriciels à vue.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***2.*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ***3.*** $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

II. Calcul d'inverse

II.1. Définition de l'inverse et utilisation d'une relation matricielle

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Quelle propriété démontre que $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de A ?

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrez que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre J^2, J et I.

b) Montrer que J est inversible et donner son inverse en fonction de J et I.

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 4A$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

II.2. Reconnaître les matrices non inversibles

Commentaire

Pour démontrer qu'une matrice carrée M est non inversible, on peut utiliser l'une des propriétés suivantes :

M est triangulaire et l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul	$\Rightarrow$ M est non inversible

M possède deux colonnes (resp. lignes) égales	$\Rightarrow$ M est non inversible

M possède deux colonnes (resp. lignes) colinéaires.	$\Rightarrow$ M est non inversible

On utilisera à bon escient l'une ou l'autre de ces propriétés dans les exercices suivants.
Ces propriétés seront détaillées dans l'année (notamment lors de la définition du rang d'une matrice).

Exercice 5
Sans faire de calcul, expliquez pourquoi les matrices suivantes sont non inversibles.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

II.3. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Commentaire

Commençons par rappeler la formule d'inversion pour les matrices carrées d'ordre 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

2) Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A inversible, d'inverse :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Comment retenir cette formule :

× on échange les éléments diagonaux,

× on multiplie les autres par -1,

× et on n'oublie pas de multiplier par l'inverse de $ad - bc$ (obtenu par « produit en croix »).

La quantité $q = ad - bc$ est appelé **déterminant de** A. On la note habituellement det(A). Cette notion de déterminant est aussi définie pour des matrices $n \times n$ (mais nous ne le ferons pas cette année). On pourra retenir :

$$\boxed{A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0}$$

Exercice 6
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donnez (sans faire de calcul) leur inverse.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.4. Inverse par algorithme du pivot de Gaus

Exercice 7
À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que chacune des matrices suivantes est inversible et déterminer son inverse. On utilisera la présentation matricielle.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

III. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire homogène

Exercice 8

1. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x - 6y + 2z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

3. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Exercice 9

1. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

3. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Exercice 10

1. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 6x - 3y + 9z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

IV. Puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 11

On note I la matrice identité d'ordre 3 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = I + 2H$.

2. Calculer H^2, puis H^k pour tout $k \geqslant 2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de I et de H.