# Algèbre linéaire (matrices et endomorphismes) - niveau 3

## I. Puissances d'une matrice via le binôme de Newton

**Exercice 1**

*1.* On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*a)* Déterminer $A^2$. Démontrer alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$.

*b)* Déterminer $B^2$ et $B^3$. En déduire $B^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

*c)* Déterminer $C^2$. Conjecturer une formule pour $C^k$ et la démontrer.

*2.* Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

*a)* Écrire la matrice $M$ en fonction des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*b)* À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 2**

On note $G = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha$ et $\beta$ étant des réels strictement positifs.

On note également, pour tout $t \geqslant 0$ : $M(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$.

*1.* Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$.

*2.* En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $t$ réel : $(I_3 + \frac{t}{k}G)^k = I_3 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(\frac{t}{k})^i(-\alpha-\beta)^{i-1}\right) G$.

*3.* Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $t$ réel, $\sum\limits_{i=1}^{n} \binom{k}{i}(\frac{t}{k})^i(-\alpha-\beta)^{i-1} = \dfrac{1-(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta}$ et en déduire que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G$$

# II. Puissances d'une matrice via une division euclidienne de polynômes

**Exercice 3**

On note $G = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ 4\alpha & 0 & -4\alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha > 0$. On note aussi $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On note également, pour tout $t \geqslant 0$ : $M(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k$.

*1.* On admet que $A^3 = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 2A^2 + A$ (on explicitera $A^2$). Que peut-on dire du polynôme $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$ ?

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'il existe un polynôme $Q$ et des réels $a, b, c$ tels que, pour tout $x$ réel : $\left(1 + \frac{\theta}{k} x\right)^k = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c \quad (*)$.

*2.* Déterminer une factorisation de $U(x)$ et en déduire que $c = 1$ et $\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k = a + b + c$.

*3.* En dérivant la relation $(*)$, montrer que, $\theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a + b$.
En déduire que $a = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1$, $b = 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2$.

*4.* En conclure que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = \left(1 - (1 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) A^2 + ((2 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2)A + I_3$$

# III. Algèbre théorique

**Exercice 4**
Soit $E$ un espace vectoriel et soit $f$ un endomorphisme de $E$ ($i.e.$ $f \in \mathscr{L}(E)$).

***1)*** Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow \ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

***2)*** Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow \ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

***3)*** Conclure.