Analyse - niveau 1

I. Déterminer la régularité d'une fonction

- Il faut savoir démontrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$, $\ldots$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ensemble E. La manière de procéder est toujours la même.
  La fonction f est `[type de régularité]` sur E car elle est (au choix) :
  1) **la somme** $f = f_1 + f_2$ où :
    - × f_1 est `[type de régularité]` sur E.
    - × f_2 est `[type de régularité]` sur E.

  2) **le produit** $f = f_1 \times f_2$ où :
    - × f_1 est `[type de régularité]` sur E.
    - × f_2 est `[type de régularité]` sur E.

  3) **l'inverse** $f = \dfrac{1}{f_1}$ où :
    - × f_1 est `[type de régularité]` sur E.
    - × f_1 ne s'annule pas sur E.

  4) **le quotient** $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
    - × f_1 est `[type de régularité]` sur E.
    - × f_2 :
      - – est `[type de régularité]` sur E.
      - – ne s'annule pas sur E.

  5) **la composée** $f = f_2 \circ f_1$ où :
    - × f_2 est `[type de régularité]` sur F. *(ici F est choisi le plus grand possible)*
    - × f_1 est :
      - – `[type de régularité]` sur E.
      - – telle que $f(E) \subset F$

  où l'on remplace chaque occurrence de `[type de régularité]` par continue, ou dérivable ou de classe $\mathcal{C}^1$ ou de classe $\mathcal{C}^2$, $\ldots$, ou de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- Pour démontrer qu'une fonction f est `[type de régularité]` sur E, il s'agit donc de montrer que des sous-fonctions f_1 et f_2 sont `[type de régularité]` sur E.
  Pour démontrer que f_1 et f_2 sont `[type de régularité]` sur E, on peut avoir à les décomposer elles-mêmes à l'aide de sous-fonctions et ainsi de suite.
  Ce type de démonstration nécessite des fonctions particulières dont on sait qu'elles sont `[type de régularité]` sur E. Ces briques de base sont :
  - × les fonctions polynomiales qui sont `[type de régularité]` sur n'importe quel ensemble E.
  - × les fonctions usuelles ($\ln$, $\exp$, $\sqrt{\cdot}$, $(.)^n$, $(.)^\alpha$, $\ldots$) dont on connaît la régularité.

- Il n'y a aucune difficulté à démontrer qu'une fonction est `[type de régularité]` sur E.
  Il suffit d'appliquer la méthode ! De ce fait, les erreurs d'application de la méthode seront lourdement sanctionnées.

- Lorsqu'on étudie la régularité d'une fonction définie par cas (comme la fonction $|\ .\ |$ par exemple), on est amené à étudier la régularité de la fonction sur chacun des **intervalles ouverts** (ici $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$) et enfin à étudier la régularité en les points restants (ici 0) en étudiant la régularité à gauche et à droite de ces points.

- Une fonction (définie en x_0) est continue en un point x_0 si elle admet une limite **finie** en ce point. On rappelle que la notion de limite est une notion locale : on s'intéresse au comportement de la fonction au voisinage du point x_0 c'est à dire dans un intervalle ouvert contenant x_0 (par exemple de type $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ où $\delta > 0$). Plusieurs cas se présentent alors :
  × si la fonction est définie par cas.
  Une fonction est dite définie par cas si elle est définie sur une réunion d'intervalles réels et la restriction à chacun de ces intervalles est donnée par une expression différente.
  Les deux fonctions suivantes sont par exemple définies par cas :

$$|\cdot| : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

  Si une fonction f est définie par cas au voisinage de x_0, alors on calcule la limite à droite de x_0, la limite à gauche de x_0 et on vérifie si ces valeurs sont égales à $f(x_0)$.
  Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto |x|$ et $x_0 = 0$.
  La fonction f est bien définie à gauche et à droite de 0 (sur $]-1,1[$ par exemple).
  De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ et enfin $f(0) = |0| = 0$.
  La fonction f est bien continue en 0.

  × si la fonction n'est pas définie par cas.
  Une fonction n'est pas définie par cas si son expression est la même sur l'ensemble de son intervalle de définition. C'est le cas par exemple des deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x^3 - x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x\,(1-x)} \end{array}$$

  Si une fonction f n'est pas définie par cas au voisinage de x_0, un seul calcul de limite est suffisant.
  Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3 - x}$ et $x_0 = 0$.
  La fonction f est bien définie de la même manière à gauche et à droite de 0 (sur $]-1,1[$ par exemple). Enfin, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1$.
  La fonction f est bien continue en 0.

  × si la fonction f n'est définie qu'à droite (resp. gauche) de x_0, on s'intéresse seulement au comportement à droite (resp. gauche) de x_0.
  Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$.
  La fonction f est bien définie à droite de 0 (sur $[0,1[$ par exemple).
  De plus : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.
  La fonction f est bien continue en 0.

  Dans le cas où f n'est pas définie au point x_0, on peut prolonger f par continuité au point x_0 si f admet une limite finie en x_0.

- On retiendra du point précédent que pour déterminer la régularité d'une fonction f, on s'intéresse au comportement de f à proximité du point x_0. La donnée de f seulement au point x_0 n'est pas suffisante. En conséquence, l'horreur :

$$\xcancel{f \text{ constante en } x_0 \Rightarrow f \text{ dérivable en } x_0}$$

  vaudra des points négatifs si rencontrée dans une copie. Au passage, la formulation « f constante en le point x_0 » est hasardeuse. Une fonction f définie en x_0 ne prend évidemment qu'une valeur en x_0 (par définition d'une fonction).

- Si une fonction est dérivable sur E alors elle est continue sur E. L'horreur :

$$\cancel{f \text{ continue sur } E \Rightarrow f \text{ dérivable sur } E}$$

vaudra des points négatifs si rencontrée. Au passage, rien ne sert de parler de « fonction continue, dérivable sur E ». On parlera simplement de « fonction dérivable sur E » (la continuité s'en déduit).

- Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E si elle dérivable et que sa **dérivée** f' est de classe $\mathcal{C}^0$ sur E (*i.e.* continue sur E). De manière générale, une fonction est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur E (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si elle est dérivable et que sa **dérivée** f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur E.

Exercice 1

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'ensemble E.
Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité au bord de l'ensemble E ?

a) $f : x \mapsto x\ln(x) - x$ et $E =]0, +\infty[$

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^3}$ et $E =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

c) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)+1}$ et $E =]0, \mathrm{e}^{-1}[\cup]\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$

d) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x+5}$ et $E =]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$

e) $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ et $E =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$

f) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3 - x}$ et $E =]-\infty, +\infty[$

g) $f : x \mapsto \ln(1 + |x|)$ et $E =]-\infty, +\infty[$

2. Les fonctions précédentes sont-elles dérivables sur E ?
Sont-elles dérivables au bord de E ?

3. Les fonctions précédentes sont-elles $\mathcal{C}^1$ sur E ? Sont-elles $\mathcal{C}^2$ sur E ?
Sont-elles $\mathcal{C}^\infty$ sur E ?

II. Suites

II.1. Définitions

Exercice 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Qu'est-ce qu'une suite monotone ?

2. Traduire en mathématiques (avec les quantificateurs) les propositions mathématiques suivantes.

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3. Reprendre les questions ***2.a)*** et ***2.b)*** dans le cas où les propriétés précédentes sont vérifiées seulement à partir d'un certain rang.

4. Écrire la négation des propositions de la question ***2.***

II.2. Mise en pratique des définitions sur un exemple concret (et Python)

Exercice 3
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. *a)* Écrire en **Python** la fonction `calculSuite` qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie le `n`$^{\text{ème}}$ terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Quel appel permet de calculer u_8 ?

5. *a)* Écrire en **Python** la fonction `calculPremiersTermes` qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie le tableau `tab` contenant les `n` premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) On considère alors le programme **Python** suivant :

```
n = 100
absc = np.arange(n)
t = calculPremiersTermes(n)
plt.plot(absc, t, 'ro')
```

Que réalise ce programme ?

6. *a)* Justifier qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant 10^{-4}$.

b) Écrire en **Python** un programme qui permet de déterminer le premier entier n tel que $|u_n| \leqslant 10^{-4}$.

II.3. Suites récurrentes linéaires usuelles

Exercice 4
On appelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2}\, u_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$.

2. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

3. Déterminer la formule explicite de u_n.

Exercice 5
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, et vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n^3 \times u_{n+1}^2$$

1. Montrer par une récurrence double que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

2. On note $t_n = \ln(u_n)$.

a) Montrer que la suite (t_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+2} = 3t_n + 2t_{n+1}$.

b) De quel type de suite s'agit-il ?

3. Déterminer, en fonction de u_0 et u_1, le terme général de la suite (t_n).

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp\left(\frac{3^n}{4}\ln(u_0u_1) + \frac{(-1)^n}{4}\ln\left(\frac{u_0^3}{u_1}\right)\right)$$

Exercice 6
On considère la suite (u_n) définie dans l'Exercice 5.

1. Écrire en **Python** la fonction `calculPremiersTermes` qui prend en paramètre un entier `n`, des valeurs `u0`, `u1` et renvoie le tableau `tab` contenant les `n` premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Écrire un programme permettant de tracer les 100 premiers termes de la suite (u_n) lorsque $u_0 = 9/10$ et $u_1 = 19/20$.

II.4. Un calcul de limite à connaître

Exercice 7
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

III. Méthodes de calcul d'intégrales

III.1. Intégrales à vue

Exercice 8
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+4x}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^{1/\ln 2} 2^x\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

III.2. Décomposition en éléments simples

Exercice 9
Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,dt$ ***b)*** $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,dt$ ***c)*** $\displaystyle\int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$

III.3. Intégration par parties

Exercice 10
Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle I=\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle I=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$ ***c)*** $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx$

III.4. Changements de variable

Exercice 11
On note $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,dx$.

1. ***a)*** À l'aide du changement de variable $u=\mathrm{e}^x$ démontrer que : $\displaystyle I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u+1}\frac{1}{u}\,du$.

b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{u\ (u+1)}=\frac{a}{u}+\frac{b}{u+1}$$

pour tout $u\notin\{-1,0\}$.

c) En déduire la valeur de I.

2. Procéder de même pour calculer $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$.
On pourra poser le changement de variable $u=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$.