Analyse - niveau 2

I. Suites

I.1. Liens entre les définitions

Exercice 1 *Vrai ou Faux ?*

1. Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.

2. Une suite (u_n) croissante à partir d'un certain rang est minorée.

3. Si $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge.

4. Si $(|u_n|)$ tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.

5. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.

6. Une suite convergente et majorée est croissante.

7. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

8. Une suite strictement croissante diverge vers $+\infty$.

9. Une suite strictement décroissante diverge vers $-\infty$.

10. Si (u_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant v_n$ alors (v_n) est croissante.

11. Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$.

12. Si (u_n) est divergente, alors la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$ est divergente.

13. Si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

I.2. Suites récurrentes et inégalités des accroissements finis

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

1. *a)* Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

d) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Données numériques : $\mathrm{e}^{1/2} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$ au centième près.

e) Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x)$.
En déduire que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

f) Vérifier que $f\big([0, \frac{1}{2}]\big) \subset \big[0, \frac{1}{2}\big]$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \big[0, \frac{1}{2}\big]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

3. **Informatique**

a) Écrire une fonction **Python** `f` qui prend en entrée un réel `x` et qui calcule $f($`x`$)$.

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif `n` et qui calcule $u_{\mathtt{n}}$.

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près ?

Exercice 3

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in\,]0, +\infty[, \;\; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\,]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \in [b, +\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}\,(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

7. *a)* Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n):` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 0
3     while ...........
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

I.3. Suites implicites

Exercice 4
Pour tout entier n positif, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) \ = \ \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. a) Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
Dresser son tableau de variations.

b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

c) Tracer dans un même repère les courbes de f_0, f_1 et f_2.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

e) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.

f) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$.

2. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier n et qui calcule une valeur approchée de u_n à $0,001$ près par la méthode de dichotomie.

3. a) Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + n\, u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

e) Donner enfin la valeur de ℓ.

f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\, u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5
Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) \ = \ x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. a) Démontrer :

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

4. a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer : $\ell \geqslant 1$.

b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

c) Déterminer la limite de (v_n).

5. a) Montrer : $\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant 3$.

b) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `function y = hn(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geqslant 1$ en entrée :

```
def Approxv(n):
  a = 1
  b = 3
  while (b-a) > 10**(-5):
    c = (a+b)/2
    if hn(n,c) < 4 :
      ........
    else:
      ........
  ..........
```

II. Intégration

II.1. Calcul d'intégrales définies par une relation de récurrence

Exercice 6
On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n \, \mathrm{e}^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\ dx$$

1. Calculer I_0, I_1.

2. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.

3. ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $I_{n+1} - I_n$ sous forme d'une intégrale.

b) En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) En déduire enfin que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$$

5. En déduire la valeur de ℓ.

II.2. Intégrale fonction de ses bornes

Exercice 7

On considère la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\ dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de G.

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$: $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

3. En déduire un encadrement de $G(x)$, pour $x \in [0,+\infty[$.

4. Montrer alors : $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}x^3$.

5. Démontrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 8

On considère la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \exp(-t^2)\ dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de H.

2. Démontrer que la fonction H est impaire.

3. Démontrer que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
En déduire les variations de H.

4. ***a)*** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $t \in [x, 2x]$: $\exp(-4x^2) \leqslant \exp(-t^2) \leqslant \exp(-x^2)$.

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x\exp(-4x^2) \leqslant H(x) \leqslant x\exp(-x^2)$.

c) Déterminer alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x)$.

Exercice 9

On considère la fonction : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt$.

1. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

2. Monter que F est impaire.

3. Déterminer la monotonie de F.

4. Montrer : $\forall x \geqslant 1,\ \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\ dt \leqslant 1$.

5. En déduire que la fonction F admet une limite en $+\infty$.
Dans la suite, on note $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

6. On pose $G(x) = F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer G'. Que dire de G ?

b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

III. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

III.1. Equations différentielles d'ordre 1

Exercice 10

1. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t).$$

2. Soit c un réel. Montrer que la fonction $t \mapsto ct\mathrm{e}^{2t}$ est solution (particulière) de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + c\mathrm{e}^{2t}.$$

3. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + c\mathrm{e}^{2t}.$$

III.2. Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 11

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - y = 0$$

2. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ est solution (particulière) de l'équation différentielle

$$y'' - y = (1 + 4t^2)\mathrm{e}^{t^2}$$

3. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - y = (1 + 4t^2)\mathrm{e}^{t^2}$$

Exercice 12

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

2. Déterminer une solution (particulière) de l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 9y = 2 - 12t + 9t^2$$

sous la forme $f : t \mapsto a + bt + ct^2$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

3. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 9y = 2 - 12t + 9t^2$$