Analyse - niveau 3

I. Déterminer la régularité d'une fonction

- La définition suivante est hors-programme, l'exercice est un entraînement à raisonner sur des notions nouvelles.

> *Une fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:*
> - × *f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,*
> - × *f admet une limite à droite finie en a_i,*
> - × *f admet une limite à gauche finie en a_{i+1}.*
>
> *On note alors $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité de f sur $[a_i, a_{i+1}]$.*

En notant F_i une primitive de $\tilde{f}_i$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, on peut alors définir **l'intégrale de** a **à** b de la fonction f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(a_i) - F_i(a_{i-1})\right)}$$

Exercice 1
On considère la fonction :

$$f \ : \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$$
$$x \ \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[-4, 4]$.

2. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(u)\ du$.

3. Ecrire un programme en **Python** permettant de tracer le graphe de f au dessus du segment $[-4, 4]$.

Commentaire

Une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ $(a < b)$ de I.
On aurait pu démontrer dans cet exercice que f est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$.

II. Comparaison séries / intégrales

Exercice 2

1. On considère dans la suite une fonction f continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $\forall k \geqslant 1,\ \ f(k+1) \ \leqslant\ \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ dt\ \leqslant\ f(k)$.

Faire apparaître sur une même représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. *(cela ne constitue pas une démonstration)*

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k)\ \leqslant\ \int_1^{n+1} f(t)\ dt\ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Faire apparaître sur une nouvelle représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. *(cela ne constitue pas une démonstration)*

c) Démontrer enfin que, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_2^{n+1} f(t)\ dt\ \leqslant\ \sum_{k=2}^{n} f(k)\ \leqslant\ \int_1^{n} f(t)\ dt$$

2. On considère maintenant la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\ln(n+1) - \ln(2)\ \leqslant\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\ \leqslant\ \ln(n)$$

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

d) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$?

3. On considère maintenant la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $[2, +\infty[$.

a) Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx$.

b) À l'aide de ce qui précède, comparer $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

d) Écrire en **Python** une fonction `sommeSI` qui :

× prend en paramètre une variable `n`,

× renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{\mathtt{n}} \frac{1}{k\ln(k)}$.