Langage mathématique et logique

I. Propositions mathématiques et démonstrations en ECG maths appli

- Rappelons tout d'abord qu'on appelle **proposition mathématique** un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).

  Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

  1. $1+1=2$ (Cette proposition est vraie)
  2. $1+1=3$ (Cette proposition est fausse)
  3. $\ln(1)=1$ (Cette proposition est fausse)
  4. Tout entier naturel est pair ou impair (Cette proposition est vraie)
  5. $e^0=1$ (Cette proposition est vraie)

  Par contre, $1+1-2$ et $(\sqrt{18})^3$ ne sont pas des propositions puisqu'on ne peut leur attribuer de valeur de vérité. Ce sont des expressions arithmétiques dont le résultat est un réel. Ce sont donc des **objets mathématiques**.

- L'activité mathématique peut se résumer grossièrement (au moins à notre niveau) en la recherche de **démonstrations** du fait que certaines propositions mathématiques sont vraies. Pour trouver ces démonstrations, il faut partir de ce que l'on sait (les hypothèses de l'exercice) et arriver au résultat souhaité, en manipulant des **définitions** et des **théorèmes** (le cours) sur le chemin.

  Distinguons essentiellement deux types de propositions à démontrer à l'écrit, où A et B sont deux propositions logiques :

  × les **implications** (de la forme $A \implies B$)
  En français, on le lit sous la forme « Si A est vrai, alors B est vrai ». C'est le raisonnement le plus naturel. En général, A est l'hypothèse faite dans la question et B le résultat à démontrer.

  × les **équivalences** (de la forme $A \iff B$)
  En français, on le lit sous la forme « A est vrai si et seulement si B est vrai ». Une équivalence étant une double implication, la justification demande souvent des arguments plus forts que pour une simple implication. On ne raisonnera par équivalence que si c'est absolument nécessaire.

Exemple

Donnons un exemple de raisonnement par implication. On souhaite démontrer que

$$\forall x \in [1,+\infty[\,,\ 1 < \frac{x^2+1}{x^2} \leqslant 2$$

ce qui peut se traduire par

$$x \geqslant 1 \implies 1 < \frac{x^2+1}{x^2} \leqslant 2$$

Sur une copie, il ne faut jamais utiliser le symbole d'implication $\implies$. On écrira toujours les raisonnements par implications avec des locutions telles que « donc », « d'où », « on en déduit que », « il vient alors », etc.
Une copie bien rédigée se présentera sous la forme :
Soit $x \in [1,+\infty[$.

$$\begin{aligned} x \geqslant 1 \ \text{ donc } \ & x^2 \geqslant 1 \\ \text{donc } \ & 0 < \frac{1}{x^2} \leqslant 1 \\ \text{donc } \ & 1 < 1 + \frac{1}{x^2} \leqslant 2 \\ \text{donc } \ & 1 < \frac{x^2+1}{x^2} \leqslant 2 \end{aligned}$$

Exemple

Donnons maintenant un exemple de raisonnement par équivalence directe.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On souhaite démontrer que $0 \leqslant 1 + x \leqslant 2 \iff 2 \leqslant 2 + x^2 \leqslant 3$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 1 + x \leqslant 2 &\iff -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ &\iff 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \\ &\iff 2 \leqslant 2 + x^2 \leqslant 3 \end{aligned}$$

Il est parfois trop difficile de démontrer une équivalence de manière directe comme dans l'exemple précédent. On doit alors procéder par double implication (prouver $A \implies B$ puis $B \implies A$).

Exemple

Terminons par un exemple d'équivalence que l'on démontre par double implication.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On souhaite démontrer que $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$.
Sens direct : On suppose que $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Il vient alors que $-1 \leqslant -x \leqslant 0$ puis que $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$.
Sens réciproque : On suppose que $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$.

- Si $x < 0$, alors $1 - x > 0$ et donc $x(1-x) < 0$.
- Si $x > 1$, alors $1 - x < 0$ et $x > 0$ donc $x(1-x) < 0$.

Finalement, on a montré que si $x \notin [0,1]$, alors $x(1-x) < 0$, ce qui est absurde puisque on a supposé que $0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$. Ainsi, $x \in [0,1]$ *i.e.* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Commentaire

On aurait aussi pu faire la démonstration de $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$ via l'étude de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ et le tracé de son tableau de variations.

- Il est à noter qu'une proposition mathématique peut comporter des variables (c'est le cas des trois exemples précédents). En conséquence, il est a priori possible que la valeur de vérité d'une proposition dépende du choix de ces variables. Reprenons les trois exemples précédents en les formalisant en ce sens.
  1. On note $A(x)$ la proposition $1 < \dfrac{x^2+1}{x^2} \leqslant 2$.
     - × nous avons vu que cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 1,
     - × on peut alors affirmer que la proposition « $\forall x \geqslant 1,\ A(x)$ » est vraie,
     - × puisque nous avons fait une preuve par implication, nous ne savons pas à ce stade si la proposition $A(x)$ est vraie ou fausse lorsque $x < 1$. On ne peut rien conclure sans une étude plus poussée.
  2. On note $B(x)$ la proposition $0 \leqslant 1 + x \leqslant 2 \iff 2 \leqslant 2 + x^2 \leqslant 3$.
     - × nous avons vu que cette proposition était vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$,
     - × on peut alors affirmer que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ B(x)$ » est vraie.
  3. On note $C(x)$ la proposition $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$.
     - × nous avons vu que cette proposition était vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$,
     - × on peut alors affirmer que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ C(x)$ » est vraie.
- Ce n'est pas parce qu'une proposition mathématique fait apparaître une variable que sa valeur de vérité dépend nécessairement de cette variable. Par exemple, les trois propositions « $\forall x \geqslant 1,\ A(x)$ », « $\forall x \in \mathbb{R},\ B(x)$ » et « $\forall x \in \mathbb{R},\ C(x)$ » font apparaître la variable x mais ne dépendent pas de x (x est liée). A contrario, la proposition « $A(x)$ » dépend de x (x est libre). Pour bien comprendre ce phénomène, nous détaillons dans la prochaine partie les notions de variables libres et liées.

II. Notion de variable libre / variable liée

- On manipule deux types de variables en mathématiques : les variables **libres** et les variables **liées**. Il n'est pas facile d'en donner une définition qui soit tout à fait rigoureuse sans rentrer dans des considérations très abstraites et délicates. Nous allons éviter ces difficultés et tenter de dégager un sens pratique à ces notions, ce qui vous permettra de comprendre ce que vous lisez et ce que vous écrivez.
- Commençons par donner quelques synonymes rencontrés dans la littérature.
  - × Les variables libres sont aussi appelées des **paramètres**. Dans une démonstration, il faut nécessairement les **introduire** par une rédaction adaptée en français avant de pouvoir écrire une expression les faisant intervenir. Une fois introduites, on dit qu'elles sont **fixées**.
  - × Les variables liées quant à elles sont aussi appelées des variables **muettes**. Contrairement aux variables libres, on n'introduit jamais une variable liée par une phrase.
- Donnons maintenant une possible définition de ces termes.
  - × Une variable intervenant dans une expression mathématique (une proposition ou un objet) est libre si cette expression dépend de la valeur de cette variable.

Exemple

La variable n est libre dans l'expression $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ puisque :

1. Si $n = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 = 1$
2. Si $n = 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 = 5$
3. Si $n = 3$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

Ainsi, l'expression $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ dépend bien de la valeur prise par n.

  - × Une variable intervenant dans une expression mathématique (une proposition ou un objet) est liée si cette expression ne dépend pas de cette variable.

Exemple

La variable k est liée dans l'expression $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.
En effet, l'écriture

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

montre bien que le résultat ne dépend pas de k (qui n'apparaît plus à droite).
Plus précisément, ici k est liée au symbole de somme $\sum$.
On peut également repérer les variables muettes en lisant l'expression en français :
$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ est la somme des carrés des entiers compris entre 1 et n. Cette phrase ne fait pas intervenir k, ce qui montre une fois de plus que k est liée. On retrouve aussi le fait que n est libre puisque la description en français fait intervenir le n.

Une autre manière de voir les choses est de se dire que nous ne pouvons pas choisir la valeur de k. En effet, k varie nécessairement de 1 à n et nous n'avons aucun contrôle là dessus. La variable liée k sert pour le symbolisme et on ne peut pas lui attribuer de valeurs (elle prend les valeurs que lui impose le symbolisme)

- Nous avons dit plus haut qu'il fallait introduire les variables libres dans une démonstration. Comment le faire de manière correcte ?
  - La manière la plus courante est d'écrire « Soit `nom_variable` $\in$ `ensemble` » en utilisant le symbole d'appartenance ou via une phrase descriptive. Exemples :

    1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
    2. Soit $x \in [0, +\infty[$.
    3. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
    4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
    5. Soit n un entier naturel pair.
    6. Soit X une variable aléatoire discrète.

  - On peut aussi écrire « Il existe `nom_variable` $\in$ `ensemble` » en utilisant le symbole d'appartenance ou via une phrase descriptive. Exemples :
    1. Soit $f : x \mapsto x^3+x-2$. Il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. Par définition, $\alpha^3+\alpha-2 = 0$.
       (Dans cet exemple, α est libre tandis que x est liée)
    2. Il existe $u = (x, y, z) \in F$ tel que $x + y + z = 1$.
       (Dans cet exemple, u, x, y et z sont libres)

  La deuxième rédaction n'a d'intérêt que si l'existence ne va pas de soi. Dans la quasi totalité des cas, il faut introduire la variable libre avec « Soit ».
- Comment repérer la présence de variables liées ?
  - Dans une proposition mathématique quantifiée, elles sont introduites par le **quantificateur universel** $\forall$ et le **quantificateur existentiel** $\exists$. Exemples :
    1. $\forall y \in [0, +\infty[\,, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$
       (cette proposition est vraie, et ne dépend ni de x, ni de y, qui sont liées)
    2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$
       (cette proposition est fausse, et ne dépend ni de n, ni de p, qui sont liées)
    3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$
       (cette proposition ne dépend pas de x, qui est liée, mais dépend de f, qui est libre)
    4. $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(0)$
       (cette proposition est vraie, et ne dépend ni de f, ni de x, qui sont liées. En effet, cette proposition se traduit par « il existe une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet un minimum global en 0 »)
  - L'expression $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ est un cas un peu particulier. Il s'agit bien d'une proposition mathématique, qui se traduit par « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 ». La variable n est liée dans cette proposition, pourtant il n'y a aucun quantificateur. La variable n est liée au symbole de limite, ici représenté comme une flèche, car c'est elle qui apparait en dessous de ce symbole.
  - Dans un objet mathématique, elles sont introduites par un symbole **mutificateur** (qui rend muet la variable). Exemples :
    1. $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} 2^{-i}$ (la variable i est liée au symbole de sommation car c'est elle qui apparaît en dessous de la somme, i parcourt $\mathbb{N}$)
    2. $\displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt$ (la variable t est liée au symbole d'intégration car c'est elle qui apparaît dans l'élément « dt », t parcourt $[0, 1]$)
    3. $\prod\limits_{k=2}^{10} (2k + 3)$ (la variable k est liée au symbole de produit car c'est elle qui apparaît en dessous du produit, k parcourt $[\![2, 10]\!]$)

4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (la variable x est liée au symbole de limite car c'est elle qui apparait en dessous de ce symbole, x se rapproche indéfiniment 0)

5. $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ (la variable k est liée au symbole de famille car c'est elle qui apparaît en indice, k parcourt $\mathbb{N}^*$)

6. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$ (la variable j est liée au symbole d'intersection car c'est elle qui apparaît en dessous de ce symbole, j parcourt $\mathbb{N}$)

7. $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$ (la variable j est liée au symbole d'union car c'est elle qui apparaît en dessous de ce symbole, j parcourt $\mathbb{N}$)

× Dans un ensemble, les variables liées sont introduites par le symbole d'appartenance $\in$. Exemples :

1. $E = \{(2a,-a)\in\mathbb{R}^2 \mid a\in\mathbb{R}\}$ (la variable a est liée)
E est l'ensemble des vecteurs de la forme $(2a,-a)$ où a décrit l'ensemble des réels.

2. $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ (les variables x, y et z sont liées)
E est l'ensemble des vecteurs de la forme (x,y,z) qui vérifient la condition $x+y+z=0$.

- Puisque une variable liée n'a pas de signification en propre, on peut toujours la remplacer par une autre lettre sans changer la signification de ce que l'on écrit. Exemples :

1. $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} 2^{-j}$

2. $\displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^{-t}\,dt = \int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx$

3. $\prod\limits_{k=2}^{10}(2k+3) = \prod\limits_{n=2}^{10}(2n+3)$

4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{z\to 0} f(z)$

5. $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*} = ([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$

6. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$

7. $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Attention cependant, on ne peut pas utiliser pour une variable liée un symbole déjà utilisé pour une variable libre. Exemples :

1. $\cancel{\sum\limits_{i=0}^{n} i = \sum\limits_{n=0}^{n} n}$. En effet, $\sum\limits_{i=0}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ mais l'expression $\sum\limits_{n=0}^{n} n$ n'a aucun sens. Comment n pourrait varier de 0 à n ?

2. $\cancel{\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt = \int_0^x x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx}$. Ici aussi, l'expression $\displaystyle\int_0^x x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx$ n'a pas de sens, puisque x ne peut pas varier de 0 à x.

$\boxed{\text{On retiendra qu'on peut remplacer une variable liée par une autre lettre pas encore utilisée.}}$

Commentaire

Nous avons fait remarquer précédemment qu'un quantificateur permet notamment d'introduire une variable liée et son ensemble d'appartenance. Une variable n'a pas d'existence propre tant qu'elle n'a pas été introduite. Ainsi, une écriture de la forme : « $\ln(x) \leqslant x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$ », n'a `AUCUN` sens mathématique. En effet, la première partie de la proposition se réfère à une variable x qui n'est introduite qu'après coup. La bonne écriture est évidemment :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x-1$$

Le quantificateur doit se placer `AVANT` l'expression mathématique faisant intervenir la variable.

Commentaire

On rappelle aussi que lorsqu'on est en présence de quantificateurs de natures différentes, l'ordre est important. Par exemple, si on dispose d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les propositions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M \qquad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$$

n'ont pas du tout le même sens. La seconde signifie que la fonction f est majorée (on est capable de trouver un réel M qui majore `TOUTES` les valeurs de $f(x)$ *i.e.* un majorant de $f(x)$ avec x qui parcourt $\mathbb{R}$ en entier). La première proposition signifie que pour chaque valeur particulière de x, on est capable de trouver un réel M (qui peut dépendre de x !) tel que, pour cette valeur particulière de x on ait : $f(x) \leqslant M$. Toute fonction satisfait cette proposition car, on peut poser, pour chaque choix de x : $M = f(x)$. On obtient bien alors : $f(x) \leqslant M$.

Exercice 1. *Rayer la ou les mentions inutiles*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : libre / liée

2. Dans l'écriture $\big([X = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : libre / liée

et la variable n est : libre / liée

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : i / k / ni i ni k

4. Une variable muette est : libre / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),

la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: dépend de n / ne dépend par de n / peut dépendre de n

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, la variable t est : libre / liée

la variable x est : libre / liée

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = 0\}$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée
la variable z est : libre / liée

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée

9. Une variable libre : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — avoir été introduite en amont

10. Une variable liée : doit toujours / ne doit jamais / doit parfois — avoir été introduite en amont

Exercice 2

a) Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

1. $\displaystyle\int_2^3 f(t)\ dt,$

2. $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt,$

3. $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\ dt,$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx$

5. $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ dt,$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\ dt,$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\ dt,$

8. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x},$

9. $(x,y) \mapsto (2x+3y, x-y),$

10. $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t},$

11. $f : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t},$

12. $f(x),$

13. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\},$

14. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\},$

15. $[1, B],$

16. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3,$

17. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} i^3,$

18. $\displaystyle\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3,$

19. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} (i+j)^3,$

20. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n,$

21. $\forall y \in\ ]0,+\infty[,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = \mathrm{e}^x$

22. $\exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \pi < k+1,$

23. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant x < k+1,$

24. $u_n,$

25. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}},$

26. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} u_n,$

27. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n,$

28. $u_n \geqslant \ln(2),$

29. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$

30. $\mathcal{P}(n),$

31. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).$

b) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{i}\sum_{j=0}^{k} 2^i\,3^j.$

De quelles variables dépend l'expression obtenue ? Était-ce prévisible ?

III. Logique propositionnelle

Considérons A et B deux propositions mathématiques.

- Les énoncés parlent parfois de conditions nécessaires et/ou suffisantes. Nous rappelons ici les définitions de ces termes.
  - × On dit que B est une **condition nécessaire** pour A si : $A \implies B$.
    (Pour que A soit vrai, il faut que B soit vrai)
  - × On dit que B est une **condition suffisante** pour A si : $B \implies A$.
    (Pour que A soit vrai, il suffit que B soit vrai)
  - × On dit que B est une **condition nécessaire et suffisante** pour A si : $A \iff B$.
    (Pour que A soit vrai, il faut et il suffit que B soit vrai)

  Exemples :

  1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le fait que f soit continue sur $\mathbb{R}$ est une condition nécessaire pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
  2. Soit $\sum u_n$ une série. Le fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ est une condition nécessaire pour que la série $\sum u_n$ converge.
  3. Soit X une variable aléatoire. Le fait que son ensemble image $X(\Omega)$ soit fini est une condition suffisante pour que X soit une variable aléatoire discrète.
  4. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La proposition $\det(M) \neq 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible.

- Rappelons maintenant quelques règles liées à la négation d'une proposition logique. On note $\texttt{NON}(A)$ le contraire de la proposition A.
  - × $\texttt{NON}(\texttt{NON}(A)) \iff A$
  - × $\texttt{NON}(A \texttt{ OU } B) \iff \texttt{NON}(A) \texttt{ ET } \texttt{NON}(B)$
  - × $\texttt{NON}(A \texttt{ ET } B) \iff \texttt{NON}(A) \texttt{ OU } \texttt{NON}(B)$
  - × $\texttt{NON}(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \iff \exists x \in E,\ \texttt{NON}(\mathcal{P}(x))$
  - × $\texttt{NON}(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \iff \forall x \in E,\ \texttt{NON}(\mathcal{P}(x))$

Exemple

La maîtrise de la négation d'une phrase quantifiée est particulièrement importante pour les questions d'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.
Rappelons que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites **indépendantes** si

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) = \mathbb{P}([X=x])\mathbb{P}([Y=y])$$

Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes si

$$\exists (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) \neq \mathbb{P}([X=x])\mathbb{P}([Y=y])$$

La stratégie pour démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes consiste alors à **expliciter** deux réels x et y bien choisis tels que $\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) \neq \mathbb{P}([X=x])\mathbb{P}([Y=y])$.