Probabilités - niveau 1 (correction)

I. Points méthodologiques

I.1. Méthodologie : Calculs de probabilités

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  $$\cancel{\mathbb{P}(A) = 0 \text{ car c'est la probabilité d'obtenir } \ldots}$$

  (cf démarche de l'exercice sur la limite monotone)
- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement A signifie que ...~~

  L'événement A est réalisé si et seulement si ... ✓
- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement A est réalisé, c'est que ...

  Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si ...

I.2. Les différents objets en probabilité discrète

Commentaire

Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega = \{P, F\}^3$.
Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1^{er} lancer fournit $Face$, le $2^{\text{ème}}$ fournit $Face$, le $3^{\text{ème}}$ fournit $Pile$.

2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir $Pile$ au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P.

$$P_1 \;=\; \{\ (P, F, F),\ (P, F, P),\ (P, P, F),\ (P, P, P)\ \}$$

Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1.

3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :

- elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a.r. X qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
  Cela démontre que la v.a.r. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).
- elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $[X = 2]$ est un événement.
  Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.
  Autrement dit : $[X = 2] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{\ (P, P, F),\ (P, F, P),\ (F, F, P)\ \}$.

Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

II. Mise en jambe : lois discrètes usuelles

II.1. Manipuler les lois usuelles

Exercice 1
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$.

1. Déterminer la valeur, si elles existent, des quantités suivantes.

a) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- Rappelons qu'on dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n, p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ si :

  a) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

  b) $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) = \dbinom{n}{k}\ p^k q^{n-k}$ avec $q = 1 - p$

  Dans la suite, notons $p = \frac{1}{4}$.

- Comme X est une v.a.r. finie alors X admet des moments à tous les ordres.
  En particulier, X admet une espérance et une variance.

- Déterminons $\mathbb{E}(X)$. Par définition :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

  Or, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
  (cette relation est vraie pour $k = 0$ si on considère $\dbinom{n-1}{-1} = 0$)
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k\ q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k\ q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} p^{k+1}\ q^{n-(k+1)} && \textit{(par changement d'indice)} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k\ q^{(n-1)-k} \\
&= np\ (p+q)^{n-1} = np && \textit{(car } p + q = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$$

- Déterminons maintenant $\mathbb{V}(X)$. D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

Or, d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\ \mathbb{P}([X=x]) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k}$$

On écrit alors : $k^2 = k\ (k-1) + k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} k^2 \binom{n}{k} &= (k\ (k-1)+k)\ \binom{n}{k} \\ &= k\ (k-1)\ \binom{n}{k} + k\ \binom{n}{k} \\ &= (k-1)\ k\binom{n}{k} + k\ \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (k-1)\ k\binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} \;+\; \sum_{k=1}^{n} k\ \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k}$$

On reconnaît la partie de droite : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} \;=\; \mathbb{E}(X)$.
Il reste à déterminer la partie de gauche.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (k-1)\ k\binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\ (k-1)\binom{n-1}{k-1}\ p^k q^{n-k} && \textit{(par la relation binomiale précédente)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (k-1)\binom{n-1}{k-1}\ p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (n-1)\binom{n-2}{k-2}\ p^k q^{n-k} && \textit{(en adaptant la relation binomiale)} \\ &= n\ (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}\ p^{k+2} q^{n-(k+2)} \\ &= n\ (n-1)\ p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}\ p^k q^{(n-2)-k} \\ &= n\ (n-1)\ p^2 \end{aligned}$$

En combinant tous ces résultats, on obtient que : $\mathbb{E}(X^2) = n\ (n-1)\ p^2 + np$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= n(n-1)\ p^2 + np - (np)^2 \\ &= np\ ((n-1)\ p + 1 - np) \\ &= np\ (\cancel{np} - p + 1 - \cancel{np}) \;=\; np\ (1-p) \;=\; npq \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = npq}$$

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \tfrac{1}{4}\right) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = \frac{n}{4} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X) = n\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}.}$$

Commentaire

- On a refait le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ ici pour rappeler la méthode. Mais il faut connaître la valeur de l'espérance et de la variance des lois classiques. Aux concours, seul le résultat est exigible et il ne faudra donc pas, sauf si c'est explicitement demandé, refaire ces calculs.
- La méthode de calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ se base sur l'écriture sur les éléments $k \in X(\Omega)$:

$$k^2 = k(k-1) + k$$

À l'échelle des variables aléatoires cela correspond à l'écriture :

$$X^2 = X(X-1) + X$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient alors :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$

On retrouve ainsi la partie de gauche et la partie de droite du calcul précédent. $\square$

b) $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.

Démonstration.
La v.a.r. $X-3$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. X qui admet une variance.

- De plus par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X-3) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(3) \;=\; \mathbb{E}(X) - 3 \;=\; \frac{n}{4} - 3$$

- Et par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X-3) \;=\; \mathbb{V}(X) \;=\; \frac{3n}{16}$$

(on rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$)

$$\boxed{\mathbb{E}(X-3) = \frac{n}{4} - 3 \;\text{ et }\; \mathbb{V}(X) = \frac{3n}{16}}$$

$\square$

c) $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

Démonstration.
Avec les mêmes arguments que dans la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(2X) = 2\mathbb{E}(X) = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(2X) = 4\mathbb{V}(X) = 4 \times n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{4}}$$

$\square$

d) $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.

- On a déjà vu que X, en tant que v.a.r. finie, admet des moments à tous les ordres. En particulier, X^2 admet une espérance.
- D'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X^2) & = & \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ & = & npq + (np)^2 \\ & = & np(1-p) + n^2p^2 \\ & = & np - np^2 + n^2p^2 \;=\; np + n(n-1)p^2 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = np + n(n-1)p^2 = \frac{n}{4} + \frac{n(n-1)}{16} = \frac{n(n+3)}{16}}$$

Commentaire

Il faut retenir cette méthode : lorsqu'on connaît la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ (il faut les connaître dans le cas des lois classiques), on obtient immédiatement la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

□

2. Reprendre la question précédente dans le cas où X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

a) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- Rappelons qu'on dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi géométrique** de paramètre $\dfrac{1}{3}$ si :
  - ***a)*** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
  - ***b)*** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \dfrac{1}{3}$
- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \dfrac{1}{3}$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

- On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $\dfrac{2}{3} \in \,]0,1[$. On en déduit que la v.a.r. X admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \;=\; \frac{1}{3}\, \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} \;=\; \frac{1}{\cancel{3}}\, \frac{1}{(\frac{1}{3})^{\cancel{2}}} \;=\; 3$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 3}$$

- Démontrons que X admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance).
  Remarquons : $X^2 = X(X-1) + X$. On en déduit :

  $$\boxed{X^2 \text{ admet une espérance } \Leftrightarrow X(X-1) \text{ admet une espérance}}$$

  Notons que $X(X-1)$ est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble image est $(X(X-1))(\Omega) = \{n\,(n-1) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
  D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n(n-1)\,\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
  Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $p = \frac{1}{3}$ et $q = 1-p$ dans la suite. On a :

  $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} n(n-1)\,\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=1}^{N} n(n-1)\,p\,q^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\,p\,q^{n-1} \\ &= p\,q \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\,q^{n-2} \end{aligned}$$

  On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée deuxième convergente car de raison $q = \frac{2}{3} \in \,]-1,1[$. Ainsi :

  $$p\,q \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\,q^{n-2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} p\,q\,\frac{2}{(1-q)^3} = p\,q\,\frac{2}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

  On en conclut que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n(n-1)\,p\,q^{n-1}$ converge.
  Ainsi, $X(X-1)$ admet une espérance.
  Ce qui démontre que X^2 admet une espérance, donnée par :

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\big(X(X-1) + X\big) \\ &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}(2q+p) \end{aligned}$$

  On en déduit, par la formule de Kœnig-Huygens :

  $$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{1}{p^2}\,(2\,q+p) - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\ &= \frac{1}{p^2}\,(2\,q+p-1) \\ &= \frac{1}{p^2}\,(2\,(1-p)+p-1) \\ &= \frac{1}{p^2}\,(2-2\,p+p-1) = \frac{1}{p^2}\,(1-p) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{\cancel{3}}\,3^{\cancel{2}} = 6 \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{3}\right) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = 3 \text{ et } \mathbb{V}(X) = 6.}$$

Commentaire

- On a refait le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ ici pour rappeler la méthode. Mais il faut connaître la valeur de l'espérance et de la variance des lois classiques. Aux concours, seul le résultat est exigible et il ne faudra donc pas, sauf si c'est explicitement demandé, refaire ces calculs.
- Rappelons que si X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $(p \in]0,1[)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}} = \frac{1-p}{p^2}$$

- On se sert de nouveau ici de la stratégie développée en question ***1***. On se permet toutefois de raisonner directement sur les v.a.r. . Dans un exercice de concours, c'est souvent cette stratégie qui sera adoptée, l'énoncé demandant généralement explicitement de déterminer la valeur de l'espérance de $X(X-1)$ avant de déterminer la variance de la v.a.r. X. □

b) $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.

Démonstration.
La v.a.r. $X-3$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. X qui admet une variance.

- De plus par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X-3) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(3) \;=\; \mathbb{E}(X) - 3 \;=\; 3-3 \;=\; 0$$

- Et par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X-3) \;=\; \mathbb{V}(X) \;=\; 6$$

(on rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$)

$$\boxed{\mathbb{E}(X-3) = 0 \;\text{ et }\; \mathbb{V}(X) = 6}$$

□

c) $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

Démonstration.
Avec les mêmes arguments que dans la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(2X) = 2\,\mathbb{E}(X) = 2 \times 3 = 6 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(2X) = 4\,\mathbb{V}(X) = 4 \times 6 = 24}$$

□

d) $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance. Elle admet donc un moment d'ordre 2.
- D'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X^2) & = & \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ & = & \dfrac{q}{p^2} + \left(\dfrac{1}{p}\right)^2 \\ & = & \dfrac{q}{p^2} + \dfrac{1}{p^2} \\ & = & \dfrac{q+1}{p^2} \ = \ \dfrac{\frac{2}{3}+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \ = \ \dfrac{5}{\cancel{3}}\, 3^{\cancel{2}} = 5 \times 3 = 15 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{q+1}{p^2} = \dfrac{2-p}{p^2} = 15}$$

Commentaire

En réalité, on a déjà déterminé $\mathbb{E}\big(X^2\big)$ en question ***2.a)***. On préfère présenter ici cette démonstration pour mettre en avant la méthode qu'il convient de retenir : lorsqu'on connaît la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ (il faut les connaître dans le cas des lois classiques), on obtient immédiatement la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

$\square$

II.2. Reconnaître les lois usuelles

Exercice 2

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in \,]0,1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1-p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité que la puce se déplace d'une unité vers la droite).
- La v.a.r. Y_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$$

□

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès v (probabilité de l'obtention d'une boule verte).
- La v.a.r. X prend pour valeur le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{G}(v).}$$

□

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 10 issues numérotées de 1 à 10.
- La v.a.r. Z prend pour valeur le numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 10 \rrbracket).}$$

□

Commentaire

Lorsqu'une v.a.r. suit une loi usuelle, il est impératif de respecter la rédaction suivante :
1) description de l'expérience,

2) description de la v.a.r. aléatoire.
On s'attachera toujours à bien détailler ces deux points.