Probabilités - niveau 2

I. Une caractérisation de la loi géométrique

Exercice 1
Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

3. Conclure.

II. La formule « du capitaine »

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Commentaire

Cette formule n'est pas au programme mais elle est utile dans certains exercices qui font intervenir la loi binomiale. En général, une question est dédiée à sa preuve et donc il n'est pas nécessaire de retenir la formule.

III. Formule des probabilités composées

Commentaire

Il faut retenir que la formule des probabilités composées permet de calculer la probabilité d'une intersection d'événements qui ne sont pas indépendants. C'est en particulier le cas lorsqu'il y a une évolution temporelle d'une urne au cours de l'expérience.

Exercice 3

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. ***a)*** Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}\big([N = n]\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

2. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
def simuleN():
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.random() < .........
        b = b+1
    return .........
```

Exercice 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2. ***a)*** Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X = k]\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

IV. Formule des probabilités totales

Commentaire

Il faut retenir que la formule des probabilités totales permet de « séparer des cas » de manière correcte dans un calcul de probabilité.

Exercice 5

1. On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile.
Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$.
On suppose en outre X et Y indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}([X = Y]) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}([X = k])\big)^2$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\, \mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

Exercice 6

Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.
On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. De plus :

× la probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$.

× la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

On considère l'événement E : « l'objet provient de la chaîne A ».

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Quelle est la probabilité que cet objet provienne de la chaîne A ?

2. On suppose maintenant que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.
On considère alors la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

   a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

   b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k])$.
   (on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$)

   c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $([Y = i])_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .