

## Analyse - niveau 2 (correction)

### I. Suites

#### I.1. Liens entre les définitions

**Exercice 1.** (\*\*) *Vrai ou Faux ?*

1. Si la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors elle n'est pas majorée.

*Démonstration.*

**Vrai.**

Procédons par l'absurde. On suppose que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  et qu'elle est majorée.

- La suite  $(u_n)$  étant majorée, il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .
- Notons  $A = M + 1$ .

Comme la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , il existe un rang  $n_0$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_n > M + 1$ .

On en déduit que pour tout  $n \geq n_0$  :

$$M + 1 < u_n \leq M$$

Absurde !

Si la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors elle n'est pas majorée.

#### Commentaire

La propriété à démontrer s'exprime sous la forme : **Si ... alors ...**

Il s'agit donc d'une implication. Plus précisément, on aurait pu l'écrire sous la forme :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \Rightarrow (u_n) \text{ n'est pas majorée}$$

Rappelons qu'une implication :  $p \Rightarrow q$  a même valeur de vérité que : **NON**( $p$ ) OU  $q$ .

Procéder par l'absurde consiste à démontrer que la négation de la propriété à démontrer est fautive. Ainsi, si l'on souhaite démontrer par l'absurde  $p \Rightarrow q$ , on doit démontrer que **NON**( $p \Rightarrow q$ ) est fautive. Or :

$$\text{NON}(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \text{NON}(\text{NON}(p) \text{ OU } q) \Leftrightarrow p \text{ ET } \text{NON}(q)$$

Ainsi, pour démontrer par l'absurde  $p \Rightarrow q$ , on suppose que les propriétés  $p$  et **NON**( $q$ ) sont vérifiées et on exhibe alors une propriété fautive. □

**Commentaire**

L'exercice est un « *Vrai ou Faux ?* ».

- Si l'énoncé est vrai, il faut en faire une démonstration.
- Si l'énoncé est faux, il suffit de fournir un contre-exemple.

2. Une suite  $(u_n)$  croissante à partir d'un certain rang est minorée.

*Démonstration.*

**Vrai.**

Supposons que la suite  $(u_n)$  est croissante à partir d'un certain rang. On en déduit qu'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$ . On en déduit notamment :

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est minorée par  $u_{n_0}$  à partir d'un certain rang ( $n_0$  en l'occurrence).  
Il reste à montrer qu'elle est minorée tout court.

Pour ce faire, considérons les éléments de la suite précédant le rang  $n_0$  :

$$u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}$$

Ces éléments sont en nombre fini et possèdent donc :

- × un minimum :  $a = \min\{u_n \mid n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket\}$ ,
- × et un maximum  $A = \max\{u_n \mid n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket\}$ .  
(on le mentionne mais cette propriété est inutile ici)

En résumé, on a démontré :

$$\forall n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket, u_n \geq a \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$$

En notant  $m = \min(a, u_{n_0})$ , on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

Une suite  $(u_n)$  croissante à partir d'un certain rang est minorée.

**Commentaire**

- Dans cette question, on démontre notamment qu'une suite  $(u_n)$  minorée à partir d'un certain rang est minorée (tout court). Cette propriété est aussi vraie pour les suites majorées et pour les suites bornées. La démonstration est similaire à celle développée au-dessus.
- On peut démontrer, de manière similaire :

$$(u_n) \text{ convergente} \Rightarrow (u_n) \text{ bornée}$$

Plus précisément, on démontre tout d'abord qu'une suite convergente est bornée à partir d'un certain rang (il suffit d'écrire la définition de suite convergente vers un réel  $\ell$ ). On conclut alors par la propriété du point précédent : la suite est bornée à partir d'un certain rang donc elle est bornée.

□

3. Si la suite  $(|u_n|)$  converge alors la suite  $(u_n)$  converge.

*Démonstration.*

**Faux.**

On peut par exemple considérer la suite de terme général :  $u_n = (-1)^n$ .

On a alors :  $|u_n| = |(-1)^n| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

La suite  $(|u_n|)$  est bien convergente. Cependant, la suite  $(u_n)$  ne l'est pas. □

4. Si la suite  $(|u_n|)$  tend vers 0 alors la suite  $(u_n)$  tend vers 0.

*Démonstration.*

**Vrai.**

C'est même une équivalence. Il suffit pour cela de revenir à la définition.

La suite  $(|u_n|)$  tend vers 0

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| |u_n| - 0 \right| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{La suite } (u_n) \text{ tend vers } 0$$

La suite  $(|u_n|)$  tend vers 0 si et seulement si la suite  $(u_n)$  tend vers 0.

**Commentaire**

- Si une suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell \in \mathbb{R}$  alors, pour toute fonction  $f$  continue en  $\ell$ , la suite  $(f(u_n))$  est convergente, de limite  $f(\ell)$ .
- On en déduit en particulier que si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell \in \mathbb{R}$  alors  $(|u_n|)$  est convergente, de limite  $|\ell|$ . Mais, comme on l'a vu dans la question 3., la convergence de la suite  $(|u_n|)$  ne permet pas de démontrer la convergence de la suite  $(u_n)$ . □

5. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.

*Démonstration.*

**Faux.**

La suite de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente, de limite 0. On peut le montrer à l'aide de la question précédente, en remarquant :

$$|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cette suite change de signe d'un rang sur l'autre et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} < u_{2n} \quad \text{ET} \quad u_{2n+2} > u_{2n+1}$$

On en déduit qu'elle n'est pas monotone à partir d'un certain rang. □

6. Une suite convergente et majorée est croissante.

*Démonstration.*

**Faux.**

La suite de terme général  $u_n = \frac{1}{n} - 1$  est :

× convergente, de limite 1.

× majorée par 1 puisque pour tout  $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq 1$  et donc  $\frac{1}{n} - 1 \leq 0$ .

Pour autant, cette suite  $(u_n)$  n'est pas croissante. Pour tout  $n \in \mathbb{N} :$

$$u_{n+1} - u_n = \left( \frac{1}{n+1} - \mathcal{X} \right) - \left( \frac{1}{n} - \mathcal{X} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{\mathcal{X} - (\mathcal{X} + 1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

(en l'occurrence, la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante) □

7. Une suite divergeant vers  $+\infty$  est croissante à partir d'un certain rang.

*Démonstration.*

**Faux.**

La suite de terme général  $u_n = n - (-1)^n$  diverge vers  $+\infty$  en tant que somme d'une suite qui diverge vers  $+\infty$  ( $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ) et d'une suite bornée ( $\forall n \in \mathbb{N}, |(-1)^n| \leq 1$ ).

Or pour tout  $n \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (\mathcal{X} + 1 - (-1)^{n+1}) - (\mathcal{X} - (-1)^n) \\ &= 1 - (-1)^{n+1} - (-1)^{n+1} && \text{(car } -(-1)^n = (-1) \times (-1)^n = (-1)^{n+1}) \\ &= 1 - 2(-1)^{n+1} \\ &= \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Et ainsi la suite  $(u_n)$  n'est pas croissante à partir d'un certain rang. □

8. Une suite strictement croissante diverge vers  $+\infty$ .

*Démonstration.*

**Faux.**

La suite de terme général  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$  est :

× strictement croissante puisque pour tout  $n \in \mathbb{N} :$

$$u_{n+1} - u_n = \left( \mathcal{X} - \frac{1}{n+1} \right) - \left( \mathcal{X} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(\mathcal{X} + 1) - \mathcal{X}}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

× convergente de limite 1.

En vertu de l'unicité de la limite, si elle existe, d'une suite, la suite  $(u_n)$  ne tend pas vers  $+\infty$ .

### Commentaire

On a vu en question 1. qu'une suite qui diverge vers  $+\infty$  n'est pas majorée. On aurait pu utiliser cet argument pour conclure puisque, pour tout  $n \in \mathbb{N} :$

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

La suite  $(u_n)$  étant majorée par 1, elle ne peut diverger vers  $+\infty$ . □

9. Une suite strictement décroissante diverge vers  $-\infty$ .

*Démonstration.*

**Faux.**

La suite de terme général  $u_n = \frac{1}{n} - 1$  est

× strictement décroissante (cf question 6.).

× convergente, de limite  $-1$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  n'est pas divergente vers  $-\infty$ . □

10. Si  $(u_n)$  est croissante et, pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$  alors  $(v_n)$  est croissante.

*Démonstration.*

**Faux.**

On considère les suites de terme général :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = 3 + (-1)^n$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \leq 2 \leq 3 + (-1)^n = v_n$$

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (3 + (-1)^{n+1}) - (3 + (-1)^n) \\ &= (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} \\ &= 2(-1)^{n+1} \\ &= \begin{cases} -2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  n'est pas croissante. □

11. Si  $(u_n)$  tend vers 0 et  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ , alors on ne peut conclure sur la limite du quotient  $\frac{u_n}{v_n}$ .

*Démonstration.*

**Faux.**

$$\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \times 0 = 0$$

□

12. Si  $(u_n)$  est divergente, alors la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$  est divergente.

*Démonstration.*

**Faux.**

La suite de terme général  $u_n = n$  diverge (vers  $+\infty$ ).

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = (n+1) - n = 1$ .

Ainsi, la suite de terme général  $v_n = u_{n+1} - u_n$  est convergente (car constante) de limite 1. □

13. Si  $(u_n)$  tend vers  $\ell \neq 0$  alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .

*Démonstration.*

**Vrai.**

Considérons une suite  $(u_n)$  convergente de limite  $\ell \neq 0$ . Alors :

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell - \ell = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\ell}{\ell} = 1 \quad \square$$

### Commentaire

- Rappelons que si la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , alors, pour toute application strictement croissante  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , la suite  $(u_{\varphi(n)})$  admet pour limite  $\ell$ . Les suites ainsi construites sont appelées sous-suites (ou suites extraites) de la suite  $(u_n)$ . En particulier, si  $(u_n)$  admet la limite  $\ell$ , il en est de même des suites  $(u_{n+1})$ ,  $(u_{2n})$  ou encore  $(u_{3n-1}) \dots$

- Notons qu'une suite peut admettre des sous-suites convergentes sans pour autant être elle-même convergente. On peut par exemple, considérer la suite de terme général  $u_n = (-1)^n$ . Cette suite n'admet pas de limite mais les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  en ont bien une.

En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\times u_{2n} = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1,$$

$$\times u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = ((-1)^2)^n \times (-1) = -1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1.$$

- La limite  $\ell$  d'une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  d'une suite  $(u_n)$  est appelée **valeur d'adhérence** de la suite  $(u_n)$ . Dans l'exemple précédent, la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet deux valeurs d'adhérence distinctes. Elle ne peut admettre de limite.

- Comme on l'a vu dans le point précédent, la connaissance des limites de certaines sous-suites peut permettre de réfuter l'existence d'une limite pour  $(u_n)$ . On peut aussi démontrer qu'une suite admet une limite  $\ell$  si on connaît la valeur de certaines de ses sous-suites. C'est ce que stipule le théorème de recouvrement :

$$\left. \begin{array}{l} u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

L'idée de la démonstration est la suivante :

- × comme  $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ , à partir d'un certain rang, tous les termes d'indices pairs de la suite  $(u_n)$  sont « proches » de  $\ell$ ,

- × comme  $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ , à partir d'un certain rang, tous les termes d'indices impairs de la suite  $(u_n)$  sont eux aussi « proches » de  $\ell$ .

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont « proches » de  $\ell$ .

Ceci démontre que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $\ell$ .

Il faut bien comprendre que chaque terme de la suite  $(u_n)$  est soit d'indice pair, soit d'indice impair. Ainsi, l'information donnée en hypothèse permet de recouvrir tous les cas possibles. On pourra d'ailleurs énoncer des théorèmes analogues en considérant des recouvrements différents :

$$\left. \begin{array}{l} u_{3n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \\ u_{3n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \\ u_{3n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

## I.2. Suites récurrentes et inégalités des accroissements finis

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ .

1. a) Démontrer que  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = f(x)$$

Ainsi, la fonction est paire sur  $\mathbb{R}$ .

□

b) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et étudier ses variations.

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  car est le quotient de :
  - × la fonction  $x \mapsto e^x$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,
  - × la fonction  $x \mapsto e^{2x} + 1$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et **qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$** .
 (en fait, on peut démontrer par une argumentation similaire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ )
- Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{e^x (e^{2x} + 1) - e^x (2 e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^{3x} + e^x - 2 e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Comme  $(e^{2x} + 1)^2 > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $e^x - e^{3x}$ .

- Si  $x > 0$ ,  $3x > x$  et donc  $e^{3x} > e^x$  par stricte croissance de la fonction exponentielle. Dans ce cas,  $f'(x) < 0$ . L'autre cas se déduit par parité de la fonction  $f$ .
- On en déduit le tableau de variations de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	0	$\frac{1}{2}$	0

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

$$\times f(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$\times \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x}{e^{2x}} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1}{e^x} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

□

c) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\ell \in \mathbb{R}^+$ .

*Démonstration.*

Notons  $g : x \mapsto f(x) - x$ . La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  par somme de fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On procède par disjonction de cas :

- Si  $x < 0$  : comme  $f(x) > 0$ , l'équation  $f(x) = x$  n'admet pas de solution.
- Si  $x \geq 0$  : tout d'abord,  $g'(x) = f'(x) - 1$ .  
Or  $f'(x) \leq 0$  donc  $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$  et la fonction  $g$  est strictement décroissante.

La fonction  $g$  est :

- × continue sur  $[0, +\infty[$ ,
- × strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ .

Elle réalise donc une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $g([0, +\infty[)$ . Or :

$$g([0, +\infty[) = ] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0)] = ] -\infty, \frac{1}{2}]$$

En effet :

- ×  $g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2}$ .
- × comme  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on obtient :  $g(x) = f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ .

Enfin, comme  $0 \in ] -\infty, \frac{1}{2}]$ , l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\ell \in \mathbb{R}^+$ .

On en déduit que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\ell \in [0, +\infty[$ .

□

d) Justifier :  $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ .

**Données numériques :**  $e^{1/2} \simeq 1,65$  et  $e \simeq 2,72$  au centième près.

*Démonstration.*

Tout d'abord, remarquons :

- ×  $g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2} \geq 0$ ,
- ×  $g(\ell) = f(\ell) - \ell = 0$ ,
- ×  $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^1 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2e^{\frac{1}{2}} - e - 1}{2(e + 1)} \leq 0$ .

En effet :

$$2e^{\frac{1}{2}} - e - 1 \simeq 2 \times 1,65 - 2,72 - 1 = 3,3 - 3,72 = -0,42 \leq 0$$

(les valeurs étant données au centième près, l'approximation obtenue est exacte au moins au dixième près)

On obtient donc :  $g(0) \geq g(\ell) \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Ces trois éléments sont dans l'ensemble  $] -\infty, \frac{1}{2}]$ .

En appliquant  $g^{-1} : ] -\infty, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$  de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :  $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ .

**Commentaire**

On pouvait aussi tout simplement remarquer que, d'après la question précédente :

$$\times \ell \in \mathbb{R}^+$$

$$\times \ell = f(\ell)$$

Ainsi :  $\ell = f(\ell) \in f(\mathbb{R}^+)$ . Or  $f(\mathbb{R}^+) = ]0, \frac{1}{2}]$ . Ainsi  $\ell \in ]0, \frac{1}{2}]$ . □

e) Montrer :  $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq f(x)$ .

En déduire :  $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \geq 0$ .

• D'après la question **1.b)** :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} \leq 0$$

Donc :  $|f'(x)| = -f'(x) = \frac{e^{3x} - e^x}{(1 + e^{2x})^2}$ . Et ainsi :

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= \frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{3x} - e^x - e^x \times (e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{\cancel{e^{3x}} - e^x - \cancel{e^{3x}} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^{2x} + 1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq f(x)$ .

• Or, l'étude de la fonction  $f$  (question **1.b)**) démontre qu'elle atteint son maximum en 0.

On en déduit :  $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq f(x) \leq f(0) = \frac{1}{2}$ .

□

f) Vérifier que  $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$ .

*Démonstration.*

La fonction  $f$  est continue et décroissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . On en déduit :

$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)\right] = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e+1}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

L'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$  est stable par  $f$ .

□

2. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ .

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où  $\mathcal{P}(n) : u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ .

► **Initialisation :**

$$u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$

(i.e.  $u_{n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$ ).

Par définition,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Or :

× par hypothèse de récurrence, on sait :  $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ .

× l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$  est stable par  $f$ .

On obtient donc :  $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, \frac{1}{2}]$ .

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ .

□

b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \quad \text{puis que} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

*Démonstration.*

• D'après les questions précédentes :

×  $f$  est dérivable sur  $[0, \frac{1}{2}]$ ,

×  $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |y - x|$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En appliquant cette inégalité à  $y = u_n \in [0, \frac{1}{2}]$  et  $x = \ell \in [0, \frac{1}{2}]$ , on obtient :

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

Et ainsi :  $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$ .

• Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où  $\mathcal{P}(n) : |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ .

► **Initialisation :**

$|u_0 - \ell| \leq \frac{1}{2}$  car  $u_0$  et  $\ell$  sont des éléments de  $[0, \frac{1}{2}]$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$

(i.e.  $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$ ).

D'après le résultat précédent :  $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$ .

Or, par hypothèse de récurrence :  $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ .

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ .

□

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- D'après la question précédente :  $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ . Autrement dit :

$$-\frac{1}{2^{n+1}} \leq u_n - \ell \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- Or :

$$\times \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ car } 2^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

$$\times -\frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite  $(u_n - \ell)$  est convergente de limite 0.

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est convergente et de limite  $\ell$ .

□

### 3. Informatique

a) Écrire une fonction **Python** **f** qui prend en entrée un réel  $x$  et qui calcule  $f(x)$ .

*Démonstration.*

```
1 def f(x):  
2     return np.exp(x) / (np.exp(2*x) + 1)
```

□

b) En utilisant la fonction **f** précédente, écrire une fonction **SuiteU** qui prend en entrée un entier positif  $n$  et qui calcule  $u_n$ .

*Démonstration.*

On propose la fonction suivante :

```
1 def SuiteU(n):  
2     u = 0  
3     for i in range(n):  
4         u = f(u)  
5     return u
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**

L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :

- × cette fonction se nomme **SuiteU**,
- × elle prend en paramètre d'entrée l'entier **n**.

```
1 def SuiteU(n):
```

La variable **u**, qui contiendra les valeurs successives de la suite  $(u_n)$  est initialisée à 0 : la valeur de  $u_0$ .

```
2     u = 0
```

- **Structure itérative**

Les lignes 3 à 4 consistent à calculer les valeurs successives de la suite  $(u_n)$ .

Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
3     for i in range(n):  
4         u = f(u)
```

On tire ici partie de la définition récursive (d'ordre 1) de cette suite. La nouvelle valeur de la suite, que l'on stockera dans la variable  $u$ , est obtenue à l'aide de la valeur précédente qui est celle alors stockée dans  $u$ .

- **Fin de la fonction**

À l'issue de cette boucle, la variable  $u$  contient la quantité  $u_n$  où  $n$  est le paramètre entré lors de l'appel de la fonction. On renvoie donc  $u$ .

### Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- Le programme **Python** consiste à mettre à jour successivement la variable  $u$  jusqu'à obtention de la valeur que l'on souhaite calculer. L'idée est la suivante.  
Si avant le  $i^{\text{ème}}$  tour de boucle (avec  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) :

la variable  $u$  contient la valeur  $u_{i-1}$

alors, à l'issue de ce tour de boucle :

la variable  $u$  contient la valeur  $u_i$

Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable  $u$  contient  $u_n$ .

- Dans ce programme, on réalise un appel à la fonction  $f$ . On obtient ainsi le programme générique permettant de calculer  $u_n$  pour toute suite  $(u_n)$  récurrente d'ordre 1 (c'est à dire qui vérifie :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ ). Il faut apprendre ce programme qui est une question classique et très rentable des concours.
- Aux concours, il est toujours possible de coder la fonction  $f$  à part. Cependant, les questions **Python** sont généralement plus dirigées (on demande généralement de remplir des programmes à trous) ce qui laisse aux candidat-es moins de possibilité de prendre des initiatives. Il faut aussi savoir coder la fonction **SuiteU** lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction  $f$ . Il suffit alors de remplacer  $f(u)$  par son expression.

```
1 def SuiteU(n):  
2     u = 0  
3     for i in range(n):  
4         u = np.exp(u) / (np.exp(2*u) + 1)  
5     return u
```

□

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-6}$  près ?

*Démonstration.*

D'après la question **2.b.**, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ .

S'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que :  $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-6}$ , on obtiendra par transitivité :  $|u_n - \ell| \leq 10^{-6}$ . Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-6} &\Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 10^6 && \text{(par décroissance de la} \\ &&& \text{fonction inverse sur } ]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow \ln(2^{n+1}) \geq \ln(10^6) && \text{(par croissance de la fonction} \\ &&& \text{ln sur } ]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow (n+1) \ln(2) \geq 6 \ln(10) \\ &\Leftrightarrow n+1 \geq \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)} && \text{(car } \ln(2) > 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)} - 1 \end{aligned}$$

Pour  $N = \left\lceil \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)} - 1 \right\rceil$  (et les entiers plus grands) on est donc assuré que :

$$|u_N - \ell| \leq 10^{-6}$$

ce qui signifie que  $u_N$  est une approximation de  $\ell$  à  $10^{-6}$  près.

Il suffit alors d'appeler la fonction `SuiteU` avec pour paramètre `N`.

```
1 N = int(np.ceil(6 * np.log(10) / np.log(2) - 1))
2 u = SuiteU(N)
3 print(u)
```

□

### Exercice 3

Dans tout cet exercice,  $f$  désigne la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

#### Partie I : Étude de la fonction $f$

1. Dresser le tableau de variations de  $f$  en précisant ses limites en 0 et en  $+\infty$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $]0, +\infty[$ .
- Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Alors, comme  $x > 0$  :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

On obtient le tableau de variations suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de $f$			

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord :  $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$ .
  - Ensuite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ .

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

- Enfin, soit  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$f(x) = x - \ln(x) = x \left( 1 - \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

De plus, par croissances comparées :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .

On en déduit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

□

2. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$ , d'inconnue  $x \in ]0, +\infty[$ , admet exactement deux solutions, que l'on note  $a$  et  $b$ , telles que  $0 < a < 1 < b$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est :
  - × continue sur  $]0, 1[$  (car dérivable sur  $]0, 1[$ ),
  - × strictement décroissante sur  $]0, 1[$ .

Ainsi  $f$  réalise une bijection de  $]0, 1[$  dans  $f(]0, 1[)$ .

$$f(]0, 1[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right[ = ]1, +\infty[$$

Or  $2 \in ]1, +\infty[$ .

Donc l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution sur  $]0, 1[$ , notée  $a$ .

- La fonction  $f$  est :
  - × continue sur  $]1, +\infty[$  (car dérivable sur  $]1, +\infty[$ ),
  - × strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .
 Ainsi  $f$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  dans  $f(]1, +\infty[)$ .

$$f(]1, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]1, +\infty[$$

Or  $2 \in ]1, +\infty[$ .

Donc l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution sur  $]1, +\infty[$ , notée  $b$ .

Enfin, l'équation  $f(x) = 2$  admet exactement 2 solutions sur  $]0, +\infty[$  notées  $a$  et  $b$  telles que  $0 < a < 1 < b$ .

### Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction  $f$  doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels  $f$  est strictement monotone (ici  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ ).

□

3. Montrer :  $b \in [2, 4]$ . On donne :  $\ln(2) \simeq 0,7$ .

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord :

$$\times f(2) = 2 - \ln(2) \leq 2,$$

$$\times f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2)).$$

De plus,  $\ln(2) \simeq 0,7$ , donc :  $2 - \ln(2) \simeq 1,3$  et ainsi :  $f(4) = 2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6 \geq 2$ .

$$\times f(b) = 2.$$

On a donc :  $f(2) \leq f(b) \leq f(4)$ .

- Notons  $g$  la réciproque de  $f$  sur  $]1, +\infty[$ . D'après le théorème de la bijection,  $g : ]1, +\infty[ \rightarrow ]1, +\infty[$  est strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ . En appliquant  $g$  de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} g(f(2)) & \leq & g(f(b)) & \leq & g(f(4)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 2 & \leq & b & \leq & 4 \end{array}$$

On a bien démontré :  $b \in [2, 4]$ .

### Commentaire

L'indication de l'énoncé  $\ln(2) \simeq 0,7$  ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation. Un encadrement, tel que  $0,6 \leq \ln(2) \leq 0,8$ , permettrait de résoudre ce problème. □

**Partie II : Étude d'une suite**

On pose :  $u_0 = 4$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ .

4. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$ .

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[ \end{cases}$

► **Initialisation :**

$u_0 = 4$ . Or, d'après la question 3.,  $b \leq 4$ . Donc :  $u_0 \in [b, +\infty[$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (i.e.  $\begin{cases} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[ \end{cases}$ )

Par hypothèse de récurrence,  $u_n$  est bien défini et  $u_n \in [b, +\infty[$ .

- Comme  $u_n \geq b \geq 2$ , on a en particulier  $u_n > 0$ .

Donc  $\ln(u_n)$  est bien défini. D'où  $u_{n+1}$  est bien défini.

- Comme  $u_n \geq b$

alors  $\ln(u_n) \geq \ln(b)$  (par croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ )

et  $\ln(u_n) + 2 \geq \ln(b) + 2$

||

$u_{n+1}$

Enfin, par définition de  $b : f(b) = 2$ , c'est-à-dire  $b - \ln(b) = 2$ . Ainsi :  $\ln(b) = b - 2$ .

On obtient alors :

$$u_{n+1} \geq \ln(b) + 2 = (b - 2) + 2$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par principe de récurrence, on obtient que  $(u_n)$  est bien définie et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$ .

**Commentaire**

- Cette question est un classique des suites récurrentes. Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence. Pour montrer que « la suite  $(u_n)$  est bien définie », on démontre en réalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \text{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

5. Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

*Démonstration.*

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) + 2 - u_n = 2 - (u_n - \ln(u_n)) = f(b) - f(u_n)$$

Or, d'après la question précédente :  $u_n \geq b$ .

De plus, par croissance de la fonction  $f$  sur  $[b, +\infty[ : f(u_n) \geq f(b)$ .

D'où :  $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leq 0$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**Commentaire**

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite  $(u_n)$  par récurrence.

Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \leq u_n$ .

► **Initialisation** :

$$u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2 \ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4.$$

Donc  $u_1 \leq u_0$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (i.e.  $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ).

Tout d'abord  $u_{n+1} \leq u_n$  (par hypothèse de récurrence)

donc  $\ln(u_{n+1}) \leq \ln(u_n)$  (par croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ )

$$\text{et } \ln(u_{n+1}) + 2 \leq \ln(u_n) + 2$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ u_{n+2} & & u_{n+1} \end{array}$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par principe de récurrence, on en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .

- La suite  $(u_n)$  est donc :
  - × décroissante,
  - × minorée par  $b$  (car :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$ ).

On en déduit que la suite  $(u_n)$  converge. On note  $\ell$  sa limite.

- - Tout d'abord :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq b$ .  
Par passage à limite, on en déduit :  $\ell \geq b$ .
- Ensuite :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ .  
Donc, par continuité de  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$  :  $\ell = \ln(\ell) + 2$ . Or :

$$\ell = \ln(\ell) + 2 \Leftrightarrow \ell - \ln(\ell) = 2 \Leftrightarrow f(\ell) = 2$$

Or, d'après la question 2.,  $b$  est l'unique solution de l'équation  $f(x) = 2$  sur  $]1, +\infty[$ .

Donc  $\ell = b$ .

□

6. a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$ .

*Démonstration.*

On note  $h$  la fonction définie par  $h : x \mapsto \ln(x) + 2$ .

- La fonction  $h$  est dérivable sur  $[b, +\infty[$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $[b, +\infty[$ .

Soit  $x \in [b, +\infty[$ . Alors  $h'(x) = \frac{1}{x} \geq 0$ . Ainsi :  $\forall x \in [b, +\infty[, |h'(x)| = h(x) = \frac{1}{x}$ .

Or, d'après la question 3.,  $b \geq 2$ . Donc, pour tout  $x \in [b, +\infty[ : x \geq b \geq 2$ .

Par décroissance de la fonction inverse sur  $]0, +\infty[$ , on en déduit :  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ .

Ainsi :

$$\forall x \in [b, +\infty[, h'(x) \leq \frac{1}{2}$$

- On sait alors :

- ×  $h$  est dérivable sur  $[b, +\infty[$ ,
- ×  $\forall x \in [b, +\infty[, |h'(x)| = h'(x) \leq \frac{1}{2}$ .

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2, |h(y) - h(x)| \leq \frac{1}{2} |y - x|$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En appliquant cette inégalité à  $y = u_n \in [b, +\infty[$  et  $x = b \in [b, +\infty[$ , on obtient :

$$h(u_n) - h(b) = |h(u_n) - h(b)| \leq \frac{1}{2} |u_n - b| = \frac{1}{2} (u_n - b)$$

Or :

- ×  $h(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
- ×  $h(b) = \ln(b) + 2 = (b - 2) + 2 = b$ , car  $b$  est solution de l'équation  $f(x) = 2$ .

On en déduit :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$ .

□

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

*Démonstration.*

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question 4. :  $u_n \geq b$ .

Donc :  $u_n - b \geq 0$ .

- Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

► **Initialisation :**

D'une part :  $u_0 - b = 4 - b$ .

D'autre part :  $\frac{1}{2^{0-1}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$ .

Ainsi :  $u_0 - b = 4 - b$

$$\leq 4 - 2 \quad (\text{car } b \geq 2 \text{ d'après la question 3})$$

$$= 2 = \frac{1}{2^{0-1}}$$

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (i.e.  $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2^n}$ ).

D'après la question précédente :  $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$ .

Or, par hypothèse de récurrence :  $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

□

7. a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n)` : qui, prenant en argument un entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ , renvoie la valeur de  $u_n$ .

*Démonstration.*

```

1 def suite(n):
2     u = 4 # Initialisation de la variable u
3     for k in range(n):
4         u = np.log(u) + 2 # On met à jour n fois la variable u
5     return u

```

□

- b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de  $b$  à `epsilon` près.

```

1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 0
3     while .....
4         n = n + 1
5     return suite(n)

```

*Démonstration.*

- D'après la question 6.b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

S'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{2^{N-1}} \leq \varepsilon$ , on obtiendra par transitivité :

$$0 \leq u_N - b \leq \varepsilon$$

Donc  $u_N$  est une valeur approchée de  $b$  à  $\varepsilon$  près.

- On complète alors le programme **Python** de la façon suivante :

```

3     while 1 / 2**(n-1) > epsilon

```

□

### I.3. Suites implicites

#### Exercice 4

Pour tout entier  $n$  positif, on définit sur  $[0, +\infty[$  la fonction  $f_n$  par :

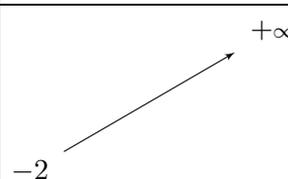
$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$$

1. a) Montrer que  $f_n$  est continue et dérivable sur son ensemble de définition.  
Dresser son tableau de variations.

*Démonstration.*

La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = e^x + 2nx > 0$$

$x$	0	$+\infty$
Signe de $f'_n(x)$	+	
Variations de $f_n$		

□

- b) Donner l'équation de la tangente de  $f_n$  en 1.

*Démonstration.*

La tangente de  $f_n$  en 1 a pour équation  $y = f_n(1) + f'_n(1)(x - 1)$ .

Or :  $f_n(1) = e^1 + n - 3$  et  $f'_n(1) = e^1 + 2n$ . Ainsi :

$$f_n(1) + f'_n(1)(x - 1) = e^1 + n - 3 + (e^1 + 2n)(x - 1) = -n - 3 + (e^1 + 2n)x$$

La tangente de  $f_n$  en 1 a pour équation  $y = -(n + 3) + (e^1 + 2n)x$ .

□

- c) Tracer dans un même repère les courbes de  $f_0, f_1$  et  $f_2$ .

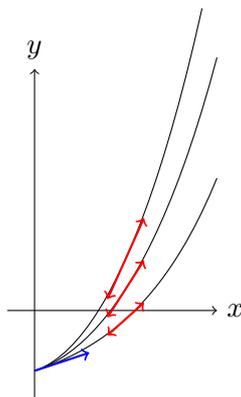
*Démonstration.*

Il était important ici de tracer les tangentes en 1 de  $f_0, f_1, f_2$ .

Afin d'avoir une idée plus précise du tracé, déterminons l'équation de la tangente de  $f_n$  en 0.

On a :  $f_n(0) = -2$  et  $f'_n(0) = 1$ .

Ainsi, l'équation de la tangente de  $f_n$  en 0 est  $y = -2 + x$ .



□

d) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  a exactement une solution positive, notée  $u_n$ .

*Démonstration.*

La fonction  $f_n$  est :

× continue sur  $[0, +\infty[$ ,

× strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

Elle réalise donc une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $f_n([0, +\infty[) = [-2, +\infty[$ .

Ainsi,  $0 \in [-2, +\infty[$  admet un unique antécédent  $u_n \in [0, +\infty[$  par la fonction  $f_n$ .

□

e) Préciser la valeur de  $u_0$ . Dans la suite on supposera que  $n \geq 1$ .

*Démonstration.*

La fonction  $f_0 : x \mapsto e^x - 3$  s'annule en  $u_0 = \ln(3)$ .

□

f) Vérifier :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in ]0, 1[$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

• On a :

×  $f_n(0) = -2 < 0$ ,

×  $f_n(u_n) = 0$  par définition,

×  $f_n(1) = e^1 + n - 3 > 0$  car  $n \geq 1$  et  $e^1 > 2,71$ .

$$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(1)$$

• D'après la question 1.d), la fonction  $f_n$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $[-2, +\infty[$ .

D'après le théorème de la bijection,  $f_n^{-1} : [-2, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est strictement croissante sur  $[-2, +\infty[$ . En appliquant  $f_n^{-1}$ , on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} f_n^{-1}(f_n(0)) & < & f_n^{-1}(f_n(u_n)) & < & f_n^{-1}(f_n(1)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & u_n & & 1 \end{array}$$

On en déduit :  $0 < u_n < 1$ .

□

2. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier  $n$  et qui calcule une valeur approchée de  $u_n$  à 0,001 près par la méthode de dichotomie.

*Démonstration.*

Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

*Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie*

**Données :**

× une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

× un intervalle de recherche  $[a, b]$ ,

× une précision de recherche  $\varepsilon$ .

**Résultat :** une valeur approchée à  $\varepsilon$  près d'un zéro (sur l'intervalle  $[a, b]$ ) de la fonction  $f$ .

Autrement dit, une valeur approchée (à  $\varepsilon$  près) d'un réel  $x \in [a, b]$  tel que :  $f(x) = 0$ .

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :
  - × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de  $f$ .  
Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.
  - × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de  $f$ .  
Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.

On itère jusqu'à obtenir un intervalle  $I$  contenant un zéro de  $f$  et de largeur plus faible que  $\varepsilon$ .

Les points de cet intervalle  $I$  sont tous de bonnes approximations du zéro contenu dans  $I$ .

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

### Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur l'intervalle  $[a, b]$ .

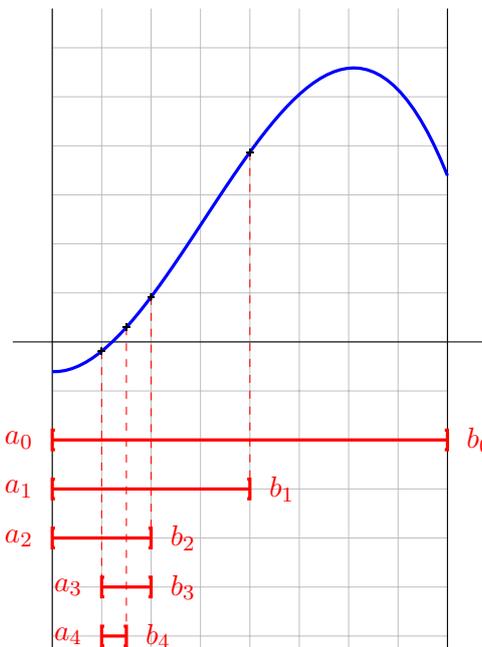
Supposons :  $f(a) f(b) \leq 0$ .

Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

### Calcul des suites $(a_m), (b_m), (c_m)$

Cas  $f(a) \leq 0$  et  $f(b) \geq 0$

- Initialement,  $a_0 = a, b_0 = b$
- À chaque tour de boucle (tant que  $b_m - a_m > \varepsilon$ ) :
  - ×  $c_m = \frac{a_m + b_m}{2}$  (point milieu de  $[a_m, b_m]$ )
  - × si  $f(c_m) < 0$  alors :
    - \*  $a_{m+1} = c_m$
    - \*  $b_{m+1} = b_m$
  - × si  $f(c_m) \geq 0$  alors :
    - \*  $a_{m+1} = a_m$
    - \*  $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite  $([a_m, b_m])_{m \in \mathbb{N}}$  de segments emboîtés :
  - × contenant tous un zéro de  $f$ ,
  - × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On cherche une valeur de  $x$  telle que :  $f_n(x) = 0$ .  
On se fixe initialement l'intervalle de recherche  $[0, 1]$  de sorte que l'équation  $f_n(x) = 0$  ne possède qu'une solution, à savoir la valeur  $u_n$  qu'on cherche à approcher (d'après la question **1.d** et **1.f**). D'un point de vue informatique, on crée des variables **g** (comme « gauche ») et **d** (comme « droite ») destinées à contenir les valeurs successives de  $a_m$  et  $b_m$ . Ces variables sont initialisées respectivement à 0 et 1.

```

2      g = 0
3      d = 1
    
```

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision 0.001 escomptée.

```

4      while d - g > 0.001:
    
```

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

$$\underline{5} \quad m = (g+d) / 2$$

Puis on teste si  $f_n(m) < 0$ .

Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de droite.

$$\begin{array}{l} \underline{6} \quad \text{if } f_n(m) < 0: \\ \underline{7} \quad \quad g = m \end{array}$$

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de gauche.

$$\begin{array}{l} \underline{8} \quad \quad \text{else:} \\ \underline{9} \quad \quad \quad d = m \end{array}$$

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que 0.001 et contient un zéro de  $f_n$ . Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à 0.001 près de ce zéro.

On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

$$\underline{12} \quad \text{return } g$$

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

$$\underline{12} \quad \text{return } d$$

Ou encore le point milieu :

$$\underline{12} \quad \text{return } (g + d) / 2$$

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus  $\frac{0.001}{2}$  de ce point milieu.

On obtient ainsi une valeur approchée à  $\frac{0.001}{2}$  du zéro recherché.

### Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :

× l'intervalle de recherche initial  $[0, 1]$  est de largeur 1.

× la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.

À la fin du  $m^{\text{ème}}$  tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur  $\frac{1}{2^m}$ .

× l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que  $0.001 = 10^{-2}$ .

On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^m} \leq 10^{-2} &\Leftrightarrow 2^m \geq 10^2 && \text{(par stricte décroissance de la} \\ &&& \text{fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\Leftrightarrow m \ln(2) \geq 2 \ln(10) && \text{(par stricte croissance de la} \\ &&& \text{fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

Ainsi :  $\left\lceil 2 \times \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$  tours de boucle suffisent.

On retiendra que si l'on souhaite obtenir une précision de 2 chiffres après la virgule, il suffit d'effectuer de l'ordre de 2 tours de boucle. Cette algorithme est donc extrêmement rapide.

**Commentaire**

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec beaucoup de précision la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** (on place ci-dessous le programme obtenu) démontre la bonne compréhension de l'algorithme demandé et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.

- On obtient le programme complet suivant.

(même si ce n'était pas explicitement demandé par l'énoncé, on avait tout intérêt à commencer par coder les fonctions  $f_n$ )

```

1 def fn(n, x):
2     return np.exp(x) + n * x**2 - 3
3
4 def dichoto(n):
5     g = 0
6     d = 1
7     while d - g > 0.001:
8         m = (g+d)/2
9         if fn(n, m) < 0:
10            g = m
11        else:
12            d = m
13    return (g+d)/2

```

□

3. a) Montrer :  $\forall x \in ]0, 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$ .

*Démonstration.*

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]0, 1[$ .

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (e^x + (n+1)x^2 - 3) - (e^x + nx^2 - 3) = x^2 > 0$$

Ainsi, pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on a :  $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ .

□

- b) En déduire le signe de  $f_n(u_{n+1})$ , puis le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

*Démonstration.*

- Comme  $u_{n+1} \in ]0, 1[$ , on peut appliquer le résultat de la question précédente.

On obtient :  $f_n(u_{n+1}) < f_{n+1}(u_{n+1})$ .

En particulier, comme  $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ , alors :  $f_n(u_{n+1}) < 0$ .

- D'après la question 1.d), la fonction  $f_n$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $[-2, +\infty[$ . D'après le théorème de la bijection,  $f_n^{-1} : [-2, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est strictement croissante sur  $[-2, +\infty[$ . En appliquant  $f_n^{-1}$ , on obtient alors :

$$\begin{array}{ccc}
 f_n^{-1}(f_n(u_{n+1})) & < & f_n^{-1}(f_n(u_n)) \\
 \parallel & & \parallel \\
 u_{n+1} & & u_n
 \end{array}$$

La suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

**Commentaire**

- Cette question **3.b)** consiste en l'étude de la suite  $(u_n)$ . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite  $(u_n)$  mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est l'unique solution dans  $[0, +\infty[$  de l'équation  $f_n(x) = 0$

On comprend alors que l'étude de  $(u_n)$  va passer par l'étude des propriétés de la fonction  $F_n$ .

- De cette définition, on tire la propriété :  $\forall m \in \mathbb{N}, f_m(u_m) = 0$ .

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite  $(u_n)$ .

C'est de cette propriété dont on se sert ici (en  $m = n$ ) pour démontrer la monotonie de la suite  $(u_n)$ . Comme la suite  $(u_n)$  est définie de manière implicite, cette étude ne se réalise pas directement en étudiant la différence  $u_{n+1} - u_n$ . Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$f_n(u_{n+1}) \leq f_n(u_n)$$

et de conclure :  $u_n \leq u_{n+1}$  à l'aide d'une propriété de  $f_n$ . □

- c) Montrer que  $(u_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

*Démonstration.*

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc vers une limite  $\ell$  qui vérifie  $0 \leq \ell \leq 1$ . □

- d) On suppose dans cette question que  $\ell > 0$ .

Calculer la limite de  $e^{u_n} + n u_n^2 - 3$  et en déduire une contradiction.

*Démonstration.*

Supposons :  $\ell > 0$ . Alors :

$$\times e^{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^\ell,$$

$$\times n u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ell^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

On en déduit que  $f_n(u_n) = e^{u_n} + n u_n^2 - 3 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

Or, par définition de  $u_n$ , on a :  $f_n(u_n) = 0$ , ce qui contredit le calcul précédent. □

- e) Donner enfin la valeur de  $\ell$ .

*Démonstration.*

D'après la question précédente,  $\ell \leq 0$ . Comme de plus  $0 \leq \ell \leq 1$ , on a :  $\ell = 0$  □

f) Montrer que  $\sqrt{\frac{n}{2}} u_n$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.*

- On a :  $f_n(u_n) = 0 = e^{u_n} + n u_n^2 - 3$ .

$$\text{Ainsi : } n u_n^2 = 3 - e^{u_n}.$$

- On en déduit :

$$\frac{n}{2} u_n^2 = \frac{3 - e^{u_n}}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{u_n^2} = \sqrt{\frac{3 - e^{u_n}}{2}}$$

$$\text{Enfin, comme } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ on en déduit : } \sqrt{\frac{n}{2}} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{\frac{3 - e^0}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1.$$

### Commentaire

On a démontré :

$$\sqrt{\frac{n}{2}} u_n = \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2}{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Ceci signifie que les suites  $(u_n)$  et  $\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$  ont même comportement asymptotique.

Autrement dit :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$ .

□

**Exercice 5**

Pour tout entier  $n$  non nul, on note  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $h_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$  et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- La fonction  $h_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car elle est la somme des fonctions :
  - ×  $x \mapsto x^n + 1$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car polynomiale.
  - ×  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  en tant qu'inverse de la fonction  $x \mapsto x^n$  :
    - dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car polynomiale,
    - et qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$h'_n(x) = n x^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = n \frac{x^{2n} - 1}{x^{n+1}}$$

Comme  $n > 0$  et  $x^{n+1} > 0$ , la quantité  $h'_n(x)$  est du signe de  $x^{2n} - 1$ . On en déduit :

$$h'_n(x) > 0 \Leftrightarrow x^{2n} - 1 > 0 \Leftrightarrow x^{2n} > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

La dernière équivalence est obtenue par stricte croissance de la fonction  $x \mapsto x^{2n}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- On en déduit le tableau de variations suivant.

$x$	0	1	+	$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$		-	0	+
Variations de $h_n$	$+\infty$	↘		$+\infty$
			3	
		↗		

**Commentaire**

Afin de déterminer le signe de la quantité  $x^{2n} - 1$ , on pouvait rédiger autrement.

- Une première méthode consiste à étudier la fonction  $g_n : x \mapsto x^{2n} - 1$ . Cette fonction étant polynomiale, elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$g'_n(x) = 2n x^{2n-1} > 0$$

La fonction  $g_n$  est donc strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Enfin, comme  $g_n(1) = 0$  :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad x^{2n} - 1 < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in ]1, +\infty[, \quad x^{2n} - 1 > 0$$

- Une deuxième méthode consiste à factoriser  $x^{2n} - 1$  :

$$x^{2n} - 1 = (x^n)^2 - 1^2 = (x^n - 1)(x^n + 1)$$

Comme  $x > 0$ , alors  $x^n > 0$  et  $x^n + 1 > 0$ . Le signe de  $x^{2n} - 1$  est donc celui de  $x^n - 1$ . Or :

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + \dots + x^{n-1})$$

Comme  $1 + x + \dots + x^{n-1} > 0$ , le signe de  $x^n - 1$  (et donc de  $x^{2n} - 1$ ) est celui de  $x - 1$ .  $\square$

2. En déduire que pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$  et vérifiant :  $0 < u_n < 1 < v_n$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- La fonction  $h_n$  est :

- × continue sur  $]0, 1[$ ,

- × strictement décroissante sur  $]0, 1[$ .

Elle réalise donc une bijection de  $]0, 1[$  sur  $h_n(]0, 1[)$ . Or :

$$h_n(]0, 1[) = ]h_n(1), \lim_{x \rightarrow 0} h_n(x)[ = ]3, +\infty[$$

Comme  $4 \in ]3, +\infty[$ , l'équation  $h_n(x) = 4$  admet une unique solution sur  $]0, 1[$ .

On note  $u_n$  cette solution.

- De même, la fonction  $h_n$  est :

- × continue sur  $]1, +\infty[$ ,

- × strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .

Elle réalise donc une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $h_n(]1, +\infty[)$ . Or :

$$h_n(]1, +\infty[) = ]h_n(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x)[ = ]3, +\infty[$$

Comme  $4 \in ]3, +\infty[$ , l'équation  $h_n(x) = 4$  admet une unique solution sur  $]1, +\infty[$ .

On note  $v_n$  cette solution.

- On remarque enfin :  $h_n(1) = 3 \neq 4$ . Ainsi,  $x = 1$  n'est pas solution de l'équation  $h_n(x) = 4$ .

Pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$  et vérifiant :  $0 < u_n < 1 < v_n$ . □

3. a) Démontrer :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

*Démonstration.*

Soit  $x > 0$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= \left( x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \right) - \left( x^n + \frac{1}{x^n} \right) \\ &= \frac{x^{2n+2} + 1}{x^{n+1}} - \frac{x^{2n+1} + x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+2} - x^{2n+1} - (x-1)}{x^{n+1}} \\ &= \frac{x^{2n+1}(x-1) - (x-1)}{x^{n+1}} = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$

□

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- D'après la question précédente, pour tout  $x > 0$  :

$$h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

Comme  $x > 0$  alors  $x^{n+1} > 0$ . Ainsi, la quantité  $h_{n+1}(x) - h_n(x)$  est du signe du produit  $(x-1)(x^{2n+1}-1)$ . Notons alors que pour tout  $x > 1$ ,  $x^{2n+1}-1 > 0$  (vu précédemment).

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, h_{n+1}(x) - h_n(x) > 0$ .

- On applique l'inégalité précédente à  $v_n > 1$  (d'après la question 4.). On obtient :

$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) > 0 \quad \text{ou encore} \quad h_{n+1}(v_n) > h_n(v_n) = 4$$

On a bien :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .

□

c) Montrer alors que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Par définition de  $v_{n+1}$ , on a :  $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$ . Ainsi, d'après la question précédente :

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

- De plus, on sait d'après la question 4. :

×  $v_n > 1$  et  $v_{n+1} > 1$ ,

× la fonction  $h_{n+1}$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $]3, +\infty[$ .

La réciproque de cette bijection, définie de  $]3, +\infty[$  sur  $]1, +\infty[$  est strictement croissante car de même monotonie que  $h_{n+1}$  sur  $]1, +\infty[$ . En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité :

$$v_n \geq v_{n+1}$$

On en conclut :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq v_{n+1}$ . La suite  $(v_n)$  est donc décroissante.

### Commentaire

- La **Partie B** consiste en l'étude de la suite  $(v_n)$ . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite  $(v_n)$  mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n$  est l'unique solution de l'équation  $h_n(x) = 4$  sur  $]1, +\infty[$

On comprend alors que l'étude de  $(v_n)$  va passer par l'étude des propriétés de la fonction  $h_n$ .

- De cette définition, on tire la propriété :  $\forall m \in \mathbb{N}^*, h_m(v_m) = 4$ .

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite  $(v_n)$ .

On l'utilise en **5.b)** pour  $m = n$  et en **5.c)** pour  $m = n + 1$ .

- Comme la suite  $(v_n)$  est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de  $(v_n)$  à l'aide de la différence  $v_{n+1} - v_n$ . Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$$

et de conclure :  $v_n \geq v_{n+1}$  à l'aide d'une propriété de  $h_{n+1}$ . □

**4. a)** Démontrer que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell$  et montrer :  $\ell \geq 1$ .

*Démonstration.*

La suite  $(v_n)$  est :

- × décroissante d'après la question **5.c)**,
- × minorée par 1 ( $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > 1$ ) d'après la question **4**.

On en conclut que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell \geq 1$ . □

**b)** En supposant que  $\ell > 1$ , démontrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$ .

En déduire une contradiction.

*Démonstration.*

Dans cette question, on suppose  $\ell > 1$ .

- Comme  $\ell \neq 0$ , on a :  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$ . Ainsi :

$$(v_n)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad (\text{car } \ell > 1)$$

On a bien :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)^n = +\infty$ .

**Commentaire**

Comme la suite  $(v_n)$  est à termes strictement positifs, on pouvait aussi écrire :

$$(v_n)^n = \exp(n \ln(v_n))$$

Puis :  $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ell)$  puisque  $\ell \neq 1$ .

Ainsi :  $n \ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ell \rightarrow +\infty$  car  $\ell > 0$ . Et enfin, par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(n \ln(v_n)) = +\infty$$

- Remarquons alors :

$$h_n(v_n) = (v_n)^n + 1 + \frac{1}{(v_n)^n}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)^n = +\infty$ , on en conclut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(v_n) = +\infty$$

Or, par définition de la suite  $(v_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_n(v_n) = 4$  et ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(v_n) = 4$$

Contradiction !

**Commentaire**

C'est encore une fois la propriété de définition des termes de la suite  $(v_n)$  qui est utilisée ici ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_n(v_n) = 4$ ). On insiste sur le fait que cette propriété est fondamentale pour l'étude de la suite implicite  $(v_n)$ . □

- c) Déterminer la limite de  $(v_n)$ .

*Démonstration.*

- En question **6.a)**, on a démontré que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell \geq 1$ .
- En question **6.b)**, on a démontré que l'hypothèse  $\ell > 1$  menait à une contradiction. On en conclut que sa négation est vérifiée, à savoir :  $\ell \leq 1$ .

Ainsi, la suite  $(v_n)$  converge vers  $\ell = 1$ .

**Commentaire**

L'énoncé donne les réponses aux questions **6.a)** et **6.b)**. Il est donc possible de traiter la question **6.c)**, question bilan, sans avoir réussi à traiter les questions précédentes. □

5. a) Montrer :  $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Rappelons tout d'abord :  $v_n > 1$  (question **4.**). D'autre part :

$$\begin{aligned} v_n \leq 3 &\Leftrightarrow h_n(v_n) \leq h_n(3) && \text{(car } h_n \text{ est strictement croissante sur } ]1, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow 4 \leq h_n(3) && \text{(par définition de } v_n) \end{aligned}$$

- Or, comme  $3^n \geq 3$  (puisque  $n > 0$ ) :

$$h_n(3) = 3^n + 1 + \frac{1}{3^n} \geq 3 + 1 + \frac{1}{3^n} > 4$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a bien :  $h_n(3) \geq 4$  et donc  $v_n \geq 3$ .

**Commentaire**

- Encore une fois, c'est la propriété de définition des termes de la suite  $(v_n)$  qui est utilisée ici. C'est logique puisqu'on ne connaît pas d'expression explicite des termes de  $(v_n)$ .
- La présence de la quantification «  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  » peut faire penser à utiliser une récurrence. Ce type de raisonnement nécessite l'existence d'une propriété liant les termes de rangs successifs afin pouvoir mettre en œuvre l'étape d'hérédité. C'est pourquoi la récurrence est l'outil de base de démonstration des propriétés des suites récurrentes d'ordre 1 (le terme au rang  $n+1$  s'exprime directement en fonction du terme au rang  $n$ ). L'utilisation est plus rare dans le cas des suites implicites mais était possible dans cette question. En effet, comme la suite  $(v_n)$  est décroissante, on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_{n+1} \leq v_n$$

L'étape d'hérédité ne pose pas de problème.

En effet, si l'on sait  $v_n \leq 3$ , on obtient alors, par transitivité :  $v_{n+1} \leq v_n \leq 3$ .

Il reste alors à démontrer la propriété d'initialisation, à savoir  $v_1 \leq 3$ .

Encore une fois, il faut revenir à la propriété de définition des termes de la suite  $(v_n)$  :

$$h_1(v_1) = v_1 + 1 + \frac{1}{v_1} = 4$$

Ainsi :  $v_1 = 3 - \frac{1}{v_1} \leq 3$  car  $v_1 > 0$  (question 4.)).

□

- b) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def hn(n, x)` : qui renvoie la valeur de  $h_n(x)$  lorsqu'on lui fournit un entier naturel  $n$  non nul et un réel  $x \in \mathbb{R}_+^*$  en entrée.

*Démonstration.*

```

1 def hn(n, x):
2     return x**n + 1 + 1 / x**n

```

**Commentaire**

Il n'y a aucune difficulté à coder en **Python** une fonction dont l'expression est donnée dans l'énoncé. Il est donc impensable de ne pas traiter cette question.

□

- c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à  $10^{-5}$  près de  $v_n$  par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier  $n \geq 1$  en entrée :

```
1 def Approxv(n):
2     a = 1
3     b = 3
4     while (b-a) > 10**(-5):
5         c = (a+b)/2
6         if hn(n,c) < 4 :
7             .....
8         else:
9             .....
10            .....
```

*Démonstration.*

Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

*Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie*

**Données :**

- × une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- × un intervalle de recherche  $[a, b]$ ,
- × une précision de recherche  $\varepsilon$ .

**Résultat :** une valeur approchée à  $\varepsilon$  près d'un zéro (sur l'intervalle  $[a, b]$ ) de la fonction  $f$ .  
Autrement dit, une valeur approchée (à  $\varepsilon$  près) d'un réel  $x \in [a, b]$  tel que :  $f(x) = 0$ .

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :
  - × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de  $f$ .  
Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.
  - × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de  $f$ .  
Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.

On itère jusqu'à obtenir un intervalle  $I$  contenant un zéro de  $f$  et de largeur plus faible que  $\varepsilon$ . Les points de cet intervalle  $I$  sont tous de bonnes approximations du zéro contenu dans  $I$ .

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

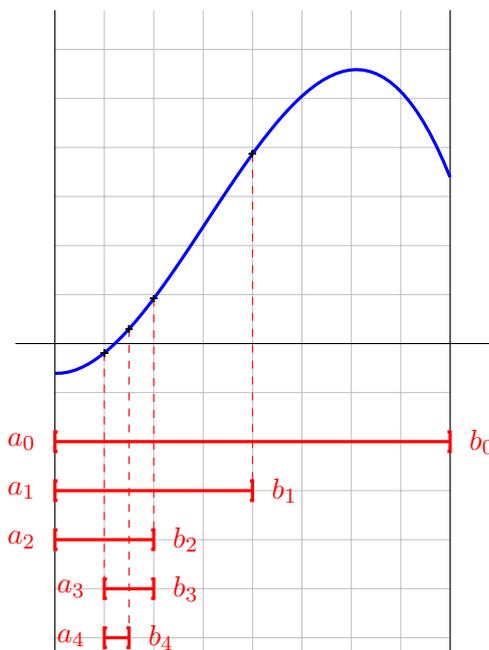
**Théorème des Valeurs Intermédiaires**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur l'intervalle  $[a, b]$ .  
Supposons :  $f(a) f(b) \leq 0$ .  
Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

**Calcul des suites  $(a_m), (b_m), (c_m)$**

Cas  $f(a) \leq 0$  et  $f(b) \geq 0$

- Initialement,  $a_0 = a, b_0 = b$
- À chaque tour de boucle (tant que  $b_m - a_m > \varepsilon$ ) :
  - ×  $c_m = \frac{a_m + b_m}{2}$  (point milieu de  $[a_m, b_m]$ )
  - × si  $f(c_m) < 0$  alors :
    - \*  $a_{m+1} = c_m$
    - \*  $b_{m+1} = b_m$
  - × si  $f(c_m) \geq 0$  alors :
    - \*  $a_{m+1} = a_m$
    - \*  $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite  $([a_m, b_m])_{m \in \mathbb{N}}$  de segments emboîtés :
  - × contenant tous un zéro de  $f$ ,
  - × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.

- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On cherche une valeur de  $x$  telle que :  $h_n(x) = 4$  ce qui s'écrit :

$$h_n(x) - 4 = 0 \quad \text{ou encore} \quad f_n(x) = 0 \quad \text{où} \quad f_n : x \mapsto h_n(x) - 4$$

On se fixe initialement l'intervalle de recherche  $[1, 3]$  de sorte que l'équation  $f_n(x) = 0$  ne possède qu'une solution, à savoir la valeur  $v_n$  qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables **a** et **b** destinées à contenir les valeurs successives de  $a_m$  et  $b_m$ . Ces variables sont initialisées respectivement à 1 et 3.

```

2      a = 1
3      b = 3
    
```

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision  $10^{-5}$  escomptée.

```

4      while b - a > 10**(-5):
    
```

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

```

5          c = (a+b) / 2
    
```

Puis on teste si  $f_n(c) < 0$ , c'est-à-dire si  $h_n(c) < 4$ .

Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de droite.

```

6              if hn(n, c) < 4:
7                  a = c
    
```

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de gauche.

```

8           else:
9           b = c
```

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que  $10^{-5}$  et contient un zéro de  $f_n$ . Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à  $10^{-5}$  près de ce zéro.

On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```

12          return a
```

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```

12          return b
```

Ou encore le point milieu :

```

12          return (a + b) / 2
```

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus  $\frac{10^{-5}}{2}$  de ce point milieu.

On obtient ainsi une valeur approchée à  $\frac{10^{-5}}{2}$  du zéro recherché.

### Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :
  - × l'intervalle de recherche initial  $[1, 3]$  est de largeur 2.
  - × la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle. À la fin du  $m^{\text{ème}}$  tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur  $\frac{2}{2^m}$ .
  - × l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que  $10^{-5}$ .

On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{2^m} \leq 10^{-5} &\Leftrightarrow \frac{2^m}{2} \geq 10^5 && \text{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \text{)} \\
 &\Leftrightarrow 2^m \geq 2 \times 10^5 && \text{(car } 4 > 0 \text{)} \\
 &\Leftrightarrow m \ln(2) \geq \ln(2) + 5 \ln(10) && \text{(par stricte croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}_+^* \text{)}
 \end{aligned}$$

Ainsi :  $\left\lceil 5 \frac{\ln(10)}{\ln(2)} + 1 \right\rceil$  tours de boucle suffisent.

On retiendra que si l'on souhaite obtenir une précision de 5 chiffres après la virgule, il suffit d'effectuer de l'ordre de 5 tours de boucle. Cette algorithme est donc extrêmement rapide.

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec beaucoup de précision la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** (on place ci-dessous le programme obtenu) démontre la bonne compréhension de l'algorithme demandé et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question.

- On obtient le programme complet suivant.

```
1  def Approxv(n):  
2      a = 1  
3      b = 3  
4      while b - a > 10**(-5):  
5          c = (a+b)/2  
6          if hn(n, c) < 4:  
7              a = c  
8          else:  
9              b = c  
10     return (a+b)/2
```

□

## II. Intégration

### II.1. Calcul d'intégrales définies par une relation de récurrence

#### Exercice 6

On considère, pour tout entier naturel  $n$ , l'application  $\varphi_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

1. Calculer  $I_0, I_1$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $\varphi_0 : x \mapsto (1-x)^0 e^{-2x} = e^{-2x}$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ .

L'intégrale  $\int_0^1 \varphi_0(x) dx$  est donc bien définie.

$$I_0 = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[ \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} (e^{-2} - e^0) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2})$$

- La fonction  $\varphi_1 : x \mapsto (1-x) e^{-2x}$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ .

L'intégrale  $\int_0^1 \varphi_1(x) dx$  est donc bien définie. On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 1-x & u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^{-2x} & v(x) = \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-x) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[ (1-x) e^{-2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} ((1-1) e^{-2} - e^0) - \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} (1 - I_0) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + e^{-2}) \end{aligned}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \text{ et } I_1 = \frac{1}{4} (1 + e^{-2}).$$

□

2. Déterminer le signe de  $I_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in [0, 1]$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Tout d'abord :  $(1-x) \geq 0$ . On en déduit :  $(1-x)^n \geq 0$ .
- De plus :  $e^{-2x} \geq 0$ .

Ainsi :  $\varphi_n(x) \geq 0$ . Enfin, par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $0 \leq 1$ ) :

$$\int_0^1 \varphi_n(x) dx \geq 0$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N} : I_n \geq 0$ .

□

3. a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , écrire  $I_{n+1} - I_n$  sous forme d'une intégrale.

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \varphi_{n+1}(x) dx - \int_0^1 \varphi_n(x) dx \\
 &= \int_0^1 (\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)) dx \\
 &= \int_0^1 ((1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x}) dx \\
 &= \int_0^1 ((\cancel{1} - x) - \cancel{1}) (1-x)^n e^{-2x} dx \\
 &= - \int_0^1 x (1-x)^n e^{-2x} dx
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = - \int_0^1 x (1-x)^n e^{-2x} dx$$

□

b) En déduire la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in [0, 1]$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On procède comme en question 2. :

- $x \geq 0$ .
- $(1-x) e^{-2x} \geq 0$ .

Ainsi :  $x(1-x) e^{-2x} \geq 0$ . Enfin, par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $0 \leq 1$ ) :

$$I_{n+1} - I_n = - \int_0^1 x(1-x) e^{-2x} dx \leq 0$$

On en déduit que la suite  $(I_n)$  est décroissante.

□

c) En déduire enfin que la suite  $(I_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

*Démonstration.*

La suite  $(I_n)$  est décroissante minorée. Elle est donc convergente vers une limite  $\ell \geq 0$ .

□

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Rappelons :  $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$ .

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = (1-x)^{n+1} & u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = e^{-2x} & v(x) = \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[ (1-x)^{n+1} e^{-2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} ((1-1)^{n+1} e^{-2} - e^0) - \frac{1}{2} (n+1) I_n \\ &= \frac{1}{2} (1 - (n+1) I_n) \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$ .

□

5. En déduire la valeur de  $\ell$ .

*Démonstration.*

D'après la question **3.b**), on sait que la suite  $(I_n)$  admet une limite finie  $\ell \geq 0$ .

Supposons par l'absurde que  $\ell \neq 0$ .

D'après la question précédente :

$$\begin{array}{ccc} 2I_{n+1} & = & 1 - (n+1)I_n \\ \begin{array}{c} \approx \\ \downarrow \\ \frac{1}{8} \end{array} & & \begin{array}{c} \approx \\ \downarrow \\ \frac{1}{8} \end{array} \\ 2\ell & & -\infty \end{array}$$

Ce qui est impossible puisque  $2\ell \neq -\infty$ .

Ainsi,  $\ell = 0$ .

□

## II.2. Intégrale fonction de ses bornes

### Exercice 7

On considère la fonction  $G : x \mapsto \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $G$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent.

- Si  $x \geq 0$  : la fonction  $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$  est continue sur le **segment**  $[x, 2x]$ .

Ainsi, l'intégrale  $\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$  est bien définie.

- Si  $x < 0$  : la fonction  $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$  est continue sur le **segment**  $[2x, x]$ .

Ainsi, l'intégrale  $\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$  est bien définie.

La quantité  $G(x)$  étant définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $G$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$ . □

2. Montrer que pour tout  $t \geq 0$  :  $t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$ .

*Démonstration.*

Soit  $t \geq 0$ . On a :

$$\begin{aligned} t^2 &\leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2 \\ \Leftrightarrow (t^2)^2 &\leq (\sqrt{1+t^4})^2 \leq (1+t^2)^2 && \text{(par stricte croissance de la fonction} \\ &&& \text{élévation au carré sur } [0, +\infty[) \\ \Leftrightarrow t^4 &\leq 1+t^4 \leq 1+2t^2+t^4 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 1 \leq 1+2t^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\forall t \geq 0, t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$$

□

3. En déduire un encadrement de  $G(x)$ , pour  $x \in [0, +\infty[$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in [0, +\infty[$ .

- D'après la question précédente, pour tout  $t \geq 0$  :

$$t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $x \leq 2x$  car  $x \geq 0$ ) :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} t^2 dt &\leq \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt \leq \int_x^{2x} (1+t^2) dt \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ \left[ \frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} &\leq G(x) \leq \left[ t + \frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} \end{aligned}$$

• Or :

$$\left[ \frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} = \frac{1}{3} [t^3]_x^{2x} = \frac{1}{3} ((2x)^3 - x^3) = \frac{1}{3} (8x^3 - x^3) = \frac{7}{3} x^3$$

$$\left[ t + \frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} = \left( 2x + \frac{(2x)^3}{3} \right) - \left( x + \frac{x^3}{3} \right) = x + \frac{7}{3} x^3$$

On en déduit :  $\forall x \geq 0, \frac{7}{3} x^3 \leq G(x) \leq x + \frac{7}{3} x^3.$

□

4. Montrer alors :  $G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{3} x^3.$

*Démonstration.*

Soit  $x > 0.$

• D'après la question précédente, on obtient par division par  $\frac{7}{3} x^3 (> 0) :$

$$1 \leq \frac{G(x)}{\frac{7}{3} x^3} \leq \frac{x}{\frac{7}{3} x^3} + 1$$

• Or :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1,$$

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{7}{3} x^3} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{7x^2} + 1 = 1.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, que  $\frac{G(x)}{\frac{7}{3} x^3}$  admet pour limite 1 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty.$

$$G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{3} x^3$$

□

5. Démontrer que  $G$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  vers un intervalle à préciser.

*Démonstration.*

- La fonction  $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+.$   
Elle admet donc une primitive  $F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+.$
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+ :$

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

La fonction  $G_1 : x \mapsto F(2x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  car elle est la composée  $G_1 = F \circ h$  où :

- ×  $h : x \mapsto 2x$  est :
  - de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  car polynomiale.
  - telle que :  $h(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+.$
- ×  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+.$

La fonction  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  car elle est la somme  $G = G_1 - F$  de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+.$

(le caractère dérivable est suffisant pour la question demandé comme on le voit ci-dessous)

- On obtient alors, pour tout  $x \geq 0$  :

$$G'(x) = 2 F'(2x) - F'(x) = 2 f(2x) - f(x) = 2 \sqrt{1 + (2x)^4} - \sqrt{1 + x^4} > 0$$

La fonction  $G$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

- La fonction  $G$  est :

× continue sur  $[0, +\infty[$ .

× strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

Elle réalise donc une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $G([0, +\infty[)$  où :

$$G([0, +\infty[) = [G(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)[ = [0, +\infty[$$

En effet :

×  $G(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0.$

×  $G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{3} x^3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$

La fonction  $G$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, +\infty[$ . □

### Exercice 8

On considère la fonction  $H : x \mapsto \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $H$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent.

- Si  $x \geq 0$  : la fonction  $f : t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur le **segment**  $[x, 2x]$ .

Ainsi, l'intégrale  $\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$  est bien définie.

- Si  $x < 0$  : la fonction  $f : t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur le **segment**  $[2x, x]$ .

Ainsi, l'intégrale  $\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$  est bien définie.

La quantité  $H(x)$  étant définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $H$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$ . □

2. Démontrer que la fonction  $H$  est impaire.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente, la fonction  $H$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$ , ensemble symétrique par rapport à 0.

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$H(-x) = \int_{-x}^{-2x} \exp(-t^2) dt = \int_x^{2x} \exp(-(-u)^2) (-du) = - \int_x^{2x} \exp(-u^2) du = -H(x)$$

La deuxième égalité est obtenue en effectuant le changement de variable  $u = -t$ .

$$\begin{array}{l} u = -t \quad (\text{et donc } t = -u) \\ \Leftrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet t = -x \Rightarrow u = x \\ \bullet t = -2x \Rightarrow u = 2x \end{array}$$

Ce changement de variable est valide car  $\psi : u \mapsto -u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment d'extrémités  $x$  et  $2x$  ( $[x, 2x]$  si  $x \geq 0$  ou  $[2x, x]$  si  $x < 0$ ).

Ainsi, la fonction  $H$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ .

□

3. Démontrer que la fonction  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.  
En déduire les variations de  $H$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $f : t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
Elle admet donc une primitive  $F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$H(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

La fonction  $U : x \mapsto F(2x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  car elle est la composée de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi,  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  car elle est la somme  $H = U - F$  de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} H'(x) &= U'(x) - F'(x) \\ &= 2 \times F'(2x) - F'(x) \\ &= 2 \times f(2x) - f(x) \quad (\text{car } F \text{ est une primitive de } f) \\ &= 2 e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} \\ &= 2 e^{-4x^2} - e^{-x^2} \end{aligned}$$

### Commentaire

Il faut faire attention à l'écriture de ce passage. Le problème se situe généralement au moment de la dérivation de la fonction  $U : x \mapsto F(2x)$ . On trouve deux types d'erreurs.

- 1) Erreur dans l'application de la formule de dérivation d'une composée

$$U'(x) \not\equiv F'(2x)$$

On rappelle que le bon résultat est :  $U'(x) = 2 \times F'(2x)$ .

- 2) Erreur de notation

$$U'(x) \not\equiv (F(2x))'$$

Formellement, on ne peut écrire :  $(F(2x))'$ . Le symbole de dérivation « ' » est réservé à la dérivation de fonction. Ici, il est appliqué à une quantité. C'est un abus de notation qui est souvent toléré mais qui est un peu dangereux car, comme tout abus, il introduit une ambiguïté.

Nommer  $U$  la fonction  $x \mapsto F(2x)$  est une bonne stratégie pour ne pas commettre ces erreurs même si cela a l'inconvénient d'introduire encore une nouvelle notation après avoir introduit  $f$  puis  $F$ .

- On détermine le signe de  $H'(x)$  en raisonnant par équivalence.

$$\begin{aligned}
 & H'(x) > 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 e^{-4x^2} > e^{-x^2} \\
 \Leftrightarrow & 2 e^{-3x^2} > 1 && \text{(en multipliant de part et d'autre par } e^{x^2} > 0) \\
 \Leftrightarrow & e^{-3x^2} > \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & -3x^2 > \ln\left(\frac{1}{2}\right) && \text{(car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } ]0, +\infty[) \\
 \Leftrightarrow & 3x^2 - \ln(2) < 0 && \text{(car } \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)) \\
 \Leftrightarrow & x^2 - \frac{\ln(2)}{3} < 0
 \end{aligned}$$

Le signe de la quantité  $H'(x)$  est donc l'opposé du signe de la quantité polynomiale :

$$P(x) = x^2 - \frac{\ln(2)}{3} = \left(x - \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right)$$

On en déduit le tableau de variation suivant.

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$	$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$	$+\infty$		
Signe de $P(x)$		+	0	-	0	+
Signe de $H'(x)$		-	0	+	0	-
Variations de $H$						

### Commentaire

La fonction  $H$  étant impaire, on pouvait restreindre l'étude à  $[0, +\infty[$  et déduire les variations de la fonction  $H$  sur  $] -\infty, 0]$  par symétrie. □

4. a) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que pour tout  $t \in [x, 2x]$  :  $\exp(-4x^2) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-x^2)$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $t \in [x, 2x]$  :

$$x \leq t \leq 2x$$

donc  $x^2 \leq t^2 \leq (2x)^2$  *(par croissance de la fonction élévation au carré sur  $\mathbb{R}_+$ )*

et  $-x^2 \geq -t^2 \geq -4x^2$  *(par multiplication par  $-1 < 0$ )*

ainsi  $\exp(-x^2) \geq \exp(-t^2) \geq \exp(-4x^2)$  *(par croissance de la fonction  $\exp$  sur  $\mathbb{R}$ )*

Pour tout  $t \in [x, 2x]$  :  $\exp(-4x^2) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-x^2)$ .

□

b) En déduire :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \exp(-4x^2) \leq H(x) \leq x \exp(-x^2)$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

- D'après la question précédente, pour tout  $t \in [x, 2x]$  :

$$\exp(-4x^2) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-x^2)$$

- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $x \leq 2x$  car  $x \geq 0$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \int_x^{2x} \exp(-4x^2) dt & \leq & \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt & \leq & \int_x^{2x} \exp(-x^2) dt \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ (2x-x) \exp(-4x^2) & & H(x) & & (2x-x) \exp(-x^2) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, x \exp(-4x^2) \leq H(x) \leq x \exp(-x^2)}$$

□

c) Déterminer alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \geq 0$ .

- D'après la question précédente :

$$x \exp(-4x^2) \leq H(x) \leq x \exp(-x^2)$$

- Or :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-4x^2) = 0,$$

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-x^2) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,  $H(x)$  admet pour limite 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0}$$

#### Commentaire

Le résultat :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-4x^2) = 0$  N'EST PAS directement un résultat de croissances comparées. On peut le démontrer en procédant comme suit :

$$x \exp(-4x^2) = \frac{x}{e^{4x^2}} = \frac{x}{e^x} \times \frac{e^x}{e^{4x^2}}$$

Or :  $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées. Et :  $\frac{e^x}{e^{4x^2}} = e^{x-4x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, on a bien :  $x \exp(-4x^2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

□

**Exercice 9**

On considère la fonction :  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ .

1. Démontrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Justifier que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer sa dérivée.

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent.

- Si  $x \geq 0$  : la fonction  $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est continue sur le **segment**  $[0, x]$ .

Ainsi, l'intégrale  $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$  est bien définie.

- Si  $x < 0$  : la fonction  $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est continue sur le **segment**  $[x, 0]$ .

Ainsi, l'intégrale  $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$  est bien définie.

La quantité  $F(x)$  étant définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $F$  a pour ensemble de définition  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Elle admet donc une primitive  $H$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F(x) = \int_0^x h(t) dt = [H(t)]_0^x = H(x) - H(0)$$

La fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  car la fonction  $H$  l'est.

- De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F'(x) = H'(x) = h(x)$$

On en déduit :  $F' = h$ .

**Commentaire**

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction  $F$  est la primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule au point 0. On en déduit alors immédiatement que  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = h(x)$ .
- L'intérêt de la démonstration adoptée dans la question est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à tous les cas particuliers (comme on l'a vu dans les deux exercices précédents).
- Au passage, soulignons une erreur classique : la fonction  $x \mapsto \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt$  (exercice précédent) **N'EST PAS** une primitive de la fonction  $t \mapsto \exp(-t^2)$  (attention aux bornes de l'intégrale !).
- Il n'y a pas, dans le programme ECG, de théorème permettant de dériver sous le symbole d'intégration. Les tentatives de ce genre révèlent une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

2. Montrer que  $F$  est impaire.

*Démonstration.*

• Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{1+(-u)^2} (-du) = - \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = -F(x)$$

• La deuxième égalité est obtenue en effectuant le changement de variable  $u = -t$ .

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad (\text{et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \bullet t = -x \Rightarrow u = x \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car  $\psi : u \mapsto -u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment d'extrémités 0 et  $x$  ( $[0, x]$  si  $x \geq 0$  ou  $[x, 0]$  si  $x < 0$ ).

Ainsi, la fonction  $F$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ .

□

3. Déterminer la monotonie de  $F$ .

*Démonstration.*

D'après la question 2., pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F'(x) = h(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

Ainsi, la fonction  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

□

4. Montrer :  $\forall x \geq 1, \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \geq 1$ .

• Pour tout  $t \in [1, x]$  :

$$\begin{aligned} t^2 &\leq 1+t^2 \\ \text{donc } \frac{1}{t^2} &\geq \frac{1}{1+t^2} \quad (\text{par décroissance de la fonction} \\ &\quad \text{inverse sur } \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } t \in [1, x] : \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

• Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $1 \leq x$ ) :

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^x = -\left[ \frac{1}{t} \right]_1^x = -\left( \frac{1}{x} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\text{Pour tout } x \geq 1 : \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1.$$

□

5. En déduire que la fonction  $F$  admet une limite en  $+\infty$ .

Dans la suite, on note  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $F$  est croissante sur  $] -\infty, +\infty[$ .

Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, la fonction  $F$  admet une limite en  $+\infty$ .

- D'après la question 4., pour tout  $x \geq 1$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \quad (\text{par la relation de Chasles } (*)) \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + 1 \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &\leq \int_0^1 1 dt + 1 = 1 + 1 = 2 \quad (\text{car pour tout } t \in [0, 1] : \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \text{ et} \\ &\quad \text{par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant}) \end{aligned}$$

La fonction  $F$  est donc majorée sur  $[1, +\infty[$ .

On en déduit, toujours d'après le théorème de la limite monotone, que la limite de  $F$  en  $+\infty$  est finie.  $\square$

6. On pose  $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ .

a) Justifier que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer  $G'$ . Que dire de  $G$  ?

*Démonstration.*

- La fonction  $T : x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  car elle est la composée  $T = F \circ s$  où :

×  $s : x \mapsto \frac{1}{x}$  est :

- dérivable sur  $]0, +\infty[$ .
- telle que  $s(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$ .

×  $F$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, la fonction  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  en tant que somme  $G = F + T$  des fonctions  $F$  et  $T$ , toutes deux dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Pour tout  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) + F'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= h(x) - h\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \end{aligned}$$

Pour tout  $x > 0$ ,  $G'(x) = 0$ .

On en déduit que la fonction  $G$  est constante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $\square$

b) En faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , montrer que  $L = 2F(1)$ .

*Démonstration.*

- D'après la question précédente, la fonction  $G$  est constante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On en déduit notamment :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = G(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = F(1) + F(1) = 2 F(1)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = 2 F(1)}$$

- En réécrivant la définition de la fonction  $G$ , on obtient pour tout  $x > 0$  :

$$2 F(1) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L.$$

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0.$$

Les quantités présentes possédant toutes une limite finie en  $+\infty$ , on obtient, par passage à la limite :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 F(1)) & = & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ \parallel & & \parallel \\ 2 F(1) & & L \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } L = 2 F(1).}$$

□

### III. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

#### III.1. Equations différentielles d'ordre 1

##### Exercice 10

1. Déterminer toutes les fonctions  $\varphi$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  et solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t).$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. D'après le cours, les solutions sont de la forme

$$\varphi : t \mapsto Ce^{2t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

□

2. Soit  $c$  un réel. Montrer que la fonction  $t \mapsto cte^{2t}$  est solution (particulière) de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

*Démonstration.* Notons  $f : t \mapsto cte^{2t}$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t}$$

donc

$$f'(t) - 2f(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t} - 2cte^{2t} = ce^{2t}$$

ce qui prouve bien que  $f$  est une solution particulière de l'équation différentielle considérée. □

3. Déterminer toutes les fonctions  $\varphi$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  et solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

*Démonstration.* D'après les questions précédentes, les solutions de cette équation différentielle sont de la forme

$$\varphi : t \mapsto Ce^{2t} + cte^{2t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

□

#### Commentaire

Il faut bien distinguer les équations différentielles homogènes de celles qui comportent un second membre car leur résolution est différente.

L'utilisation d'une constante indéterminée  $C$  permet de signifier l'existence d'une *famille* de solutions.

### III.2. Equations différentielles d'ordre 2

#### Exercice 11

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - y = 0$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Le polynôme caractéristique associé est

$$P(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Ce polynôme possède deux racines distinctes (-1 et 1) donc les solutions sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^t, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

□

2. Montrer que la fonction  $t \mapsto e^{t^2}$  est solution (particulière) de l'équation différentielle

$$y'' - y = (1 + 4t^2)e^{t^2}$$

*Démonstration.* Notons  $f : t \mapsto e^{t^2}$ . La fonction  $f$  est dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t) = e^{t^2}$$

$$f'(t) = 2te^{t^2}$$

$$f''(t) = 2e^{t^2} + 4t^2e^{t^2}$$

ce qui donne

$$f''(t) - f(t) = e^{t^2} + 4t^2e^{t^2} = (1 + 4t^2)e^{t^2}$$

Ainsi,  $f$  est bien une solution particulière de l'équation différentielle considérée.

□

3. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - y = (1 + 4t^2)e^{t^2}$$

*Démonstration.* D'après les deux questions précédentes, les solutions sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^t + e^{t^2}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

□

#### Exercice 12

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Le polynôme caractéristique associé est

$$P(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Ce polynôme possède une unique racine (3) donc les solutions sont de la forme

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{3t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

□

2. Déterminer une solution (particulière) de l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 9y = 2 - 12t + 9t^2$$

sous la forme  $f : t \mapsto a + bt + ct^2$  où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

*Démonstration.* Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et soit  $f : t \mapsto a + bt + ct^2$ . La fonction  $f$  est dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(t) &= b + 2ct \\ f''(t) &= 2c \end{aligned}$$

et donc

$$f''(t) - 6f'(t) + 9f(t) = (9a - 6b + 2c) + (9b - 12c)t + 9ct^2$$

On en déduit par identification des coefficients que  $f$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' - 6y' + 9y = 2 - 12t + 9t^2$  si et seulement si

$$\begin{cases} 9a - 6b + 2c = 2 \\ 9b - 12c = -12 \\ 9c = 9 \end{cases} \quad (*)$$

Or, on établit par remontées successives que

$$(*) \iff a = 0, b = 0, c = 1$$

$f : t \mapsto t^2$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' - 6y' + 9y = 2 - 12t + 9t^2$ .

□

3. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 9y = 2 - 12t + 9t^2$$

*Démonstration.* D'après les deux questions précédentes, les solutions sont de la forme

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{3t} + t^2, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

□