Table des matières

Dans tout le chapitre, sauf précisions :

- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $\overline{I}$ désigne *l'adhérence* de I (l'intervalle I auquel on a rajouté les bornes finies),
- f, g, h désignent des fonctions réelles définies sur I,
- x_0 un point de $\overline{I}$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.

1 Introduction : quelle motivation pour introduire les DL ?

Les DL sont un nouvel outil pour calculer des limites (ou des équivalents). Quelles sont les différentes situations qui peuvent arriver lors d'un calcul de limite et dans quel cas aurais-t-on besoin de ce nouvel outil ?

1. Pas de F.I.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + x = +\infty$ par somme
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\ln(x)} = 0$ par quotient
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x - 1 = +\infty$ par produit et somme
2. Une F.I. qui se lève par croissances comparées
   - $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissances comparées
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$ par croissances comparées
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x - 1 = -1$ par croissances comparées
3. Une F.I. qui se lève par équivalents
   - $\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ car $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$
   - $x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\frac{1}{x} = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$
4. Une F.I. qui se lève par équivalents et croissances comparées
   - Soit $n \geqslant 2$.
   $$x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(x)}{1+x^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{x^{n-\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissances comparées, car } n - \frac{3}{2} > 0$$
   - $(\mathrm{e}^x - 1)\ln(x) \underset{x\to0}{\sim} x\ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées
5. Il existe des F.I. que l'on ne peut pas simplifier avec les équivalents usuels dont nous disposons et où les croissances comparées ne sont pas suffisantes pour conclure.
   - $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ est une F.I. de la forme $\frac{0}{0}$
   - $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ est une F.I. de la forme $+\infty - (+\infty)$
   - On aimerait calculer un équivalent de $\ln(1+x) - x$ en 0. Comment faire ? On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$ mais il est interdit de sommer des équivalents donc on ne peut pas conclure que
   $$\cancel{\ln(1+x) - x \underset{x\to0}{\sim} x - x = 0}$$

On a besoin d'un nouvel outil pour calculer cet équivalent : les DL. A la fin du chapitre, on sera capable d'écrire

	$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$	DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0
donc	$\ln(1+x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$	contrairement aux équivalents, on peut sommer dans les égalités
donc	$\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$	le DL donne un équivalent
donc	$\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$	
donc	$\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$	

2 Relations de comparaisons et théorème des croissances comparées

2.1 Négligeabilité

2.1.1 Définition et premiers exemples polynomiaux

Definition 1. On dit que f *est négligeable devant* g *en* x_0 (ou que g *domine* f *en* x_0) si :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Si c'est le cas, on dit que « f est un petit o de g en x_0 » (o = 15$^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet) et on note : $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$.

Exemple 1.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$ donc $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$ donc $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- On a $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ mais on ne peut pas conclure que $x^2 = x^3$.
- On peut écrire $\underset{x\to 0}{o}(x^2) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ mais il est faux d'écrire $\underset{x\to 0}{o}(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

Le symbole d'égalité est à manier avec précaution lorsque l'on travaille avec les petits o.

Remarque 1. De manière générale, écrire que $f(x) = g(x) + \underset{x\to 0}{o}(h(x))$, c'est dire que $f(x) - g(x) = \underset{x\to 0}{o}(h(x))$, *i.e.* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 0$.

2.1.2 Croissances comparées

Théoreme 1. *Soient* $a > 0$, $b > 0$ *et* $q > 1$. *Alors*

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0, \qquad \text{i.e. } (\ln x)^b = \underset{x\to +\infty}{o}(x^a)}$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{x^a}{q^x} = 0, \qquad \text{i.e. } x^a = \underset{x\to +\infty}{o}(q^x)}$$

Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty}$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{q^x}{x^a} = +\infty}$$

Exemple 2.

1. $a = 1$ et $b = 2$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ donc $(\ln x)^2 = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$.
2. $a = 1/2$ et $b = 1$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(\sqrt{x})$.
3. $a = 10$ et $q = e$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0$ donc $x^{10} = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$.
4. $a = 1$ et $q = e^2$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$ donc $x = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{2x})$.
5. $a = 2$ et $q = e^{1/3}$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{3}x}}{x^2} = +\infty$ donc $x^2 = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\frac{1}{3}x})$.

Du théorème précédent, on tire

Théoreme 2. *Soient $a > 0$, $b > 0$ et $0 < r < 1$. Alors*

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x^a\ (\ln x)^b = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall a > 0, \forall r \in]0,1[, \quad \lim_{x\to+\infty} x^a\ r^x = 0}$$

Exemple 3.

1. $a = 1$ et $b = 1$: $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$
2. $a = 1$ et $r = \frac{1}{2}$: $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.
3. $a = 2$ et $r = \frac{1}{3}$: $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$.
4. $a = 5$ et $r = e^{-2}$: $\lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-2x} = 0$.
5. $a = 3$ et $r = e^{-4}$: $\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-4x} = 0$.

2.1.3 Lien entre négligeabilité et fonction qui tend vers 0

Proposition 3. *On suppose que $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.*

Démonstration. On écrit

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x)$$

ce qui est le produit de deux fonctions qui tendent vers 0 en x_0. □

Remarque 2. Dans cette situation, il faut penser à la fonction f comme à une fonction qui tend vers 0 en x_0 *plus rapidement* que g. Autrement dit, lorsque x se rapproche de x_0, le nombre $f(x)$ est beaucoup plus petit que le nombre $g(x)$.

2.1.4 Lien entre négligeabilité et fonction qui tend vers $+\infty$

Proposition 4. *Soient f et g deux fonctions à valeurs positives. On suppose que $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.*

Démonstration. On écrit
$$g(x) = \frac{g(x)}{f(x)} f(x)$$
ce qui est le produit de deux fonctions qui tendent vers $+\infty$ en x_0. □

Remarque 3. Dans cette situation, il faut penser à la fonction g comme à une fonction qui tend vers $+\infty$ en x_0 *plus rapidement* que f. Autrement dit, lorsque x se rapproche de x_0, le nombre $g(x)$ est beaucoup plus grand que le nombre $f(x)$.

2.2 Équivalence

2.2.1 Définition

Definition 2. On dit que f *est équivalente à* g *en* x_0 si :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

Si c'est le cas, on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

Méthode (Trouver un équivalent simple d'une somme de fonctions). On applique la même méthode que pour les suites, on cherche le terme qui tend le plus vite vers l'infini, ou le moins vite vers 0.

Exemple 4. Trouver un équivalent simple de $f(x) = x^2 + 3x + e^x$ en $+\infty$.

e^x est le « terme dominant » en $+\infty$. En effet, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{e^x} = 1$. D'où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$

Exemple 5. Trouver un équivalent simple de $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} + \dfrac{1}{e^x}$ en $+\infty$.

$\dfrac{1}{\ln(x)}$ est le « terme dominant » en $+\infty$. En effet, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{\ln(x)}} = 1$. D'où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$.

2.2.2 Propriétés générales

Théoreme 5. *La relation $\underset{x\to x_0}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Réflexivité :*
$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)}$$
2. *Symétrie :*
$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)}$$
3. *Transitivité :*
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)}$$

2.2.3 Équivalents et limites

Théoreme 6.

1. *Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell}$$

   (avec ℓ limite éventuellement infinie)

2. *Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)}$$

Remarque 4. Attention, on n'écrira jamais $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 0$.

Remarque 5. Attention si $\ell = 0$, c'est beaucoup plus délicat. Par exemple :

$$\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \quad \text{est faux}$$

2.2.4 Calculs d'équivalents en pratique

Théoreme 7.

1. *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\times h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\times t(x)}$$

2. *Compatibilité avec le quotient :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}}$$

3. *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big(f(x)\big)^n \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^n}$$

4. *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g > 0 \textit{ dans un voisinage de } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \big(f(x)\big)^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^\alpha}$$

5. *Compatibilité avec la valeur absolue :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big|f(x)\big| \underset{x\to x_0}{\sim} \big|g(x)\big|}$$

Exemple 6. Simplification d'un terme ayant une limite finie dans un produit :

1. $e^x \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} e^0 \times \ln(x) = \ln(x)$.
2. $\dfrac{\ln(x)}{2\,e^{\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{2\,e^0} = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.
3. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1}} = e^{\frac{1}{x}}$.

Exemple 7.

1. $e^x + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ (recherche du terme dominant)
2. $e^x \times \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x \times \ln(x)$ (on ne peut pas simplifier un produit si aucun des deux termes de ce produit ne se simplifie)
3. $(e^x + 1)\ \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x \ln(x)$ (compatibilité avec le produit)
4. $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e^x}} = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}}$ (compatibilité avec l'élévation à la puissance $1/2$ et avec le quotient)
5. $\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$ (compatibilité avec l'élévation à la puissance 2 et avec le quotient)
6. Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10}$?
$$\frac{(3x+4)^3\,(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(3x)^3\,(8x^{-2})}{9x} = \frac{3^3x^3\times 8x^{-2}}{9x} = \frac{3^3\ 8x}{9x} = 24$$
7. Limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{e^x-1}\right)$? Tout d'abord :
$$\frac{e^x+x^2}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$$
donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x^2}{e^x-1} = 1$. Donc, par composition des limites :
$$\ln\left(\frac{e^x+x^2}{e^x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Par contre, écrire $\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{e^x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1) = 0$ est faux. (on ne compose pas les équivalents par les fonctions)
8. $$\left.\begin{array}{l} f(x) = x+1 \\ g(x) = x \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$
Par contre, écrire $e^{x+1} = e^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{g(x)} = e^x$ est faux puisque $\dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$.

Exemple 8. Attention, on ne somme pas les équivalents ! Considérons l'exemple suivant.
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x+\sqrt{x} \\ g(x) = x+\ln(x) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$
$$\left.\begin{array}{l} h(x) = -x \\ t(x) = -x \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} t(x)$$
mais écrire $\sqrt{x} = f(x)+h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)+t(x) = \ln(x)$ est faux.

3 Rappels : continuité et dérivabilité

3.1 Continuité d'une fonction en un point

Definition 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction f est *continue* en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Méthode. Pour démontrer que f est continue en x_0 dans le cas où $f(x)$ est définie différemment à gauche et à droite de x_0, il faut donc faire deux calculs de limites.

Méthode. On démontre `TOUJOURS` la continuité d'une fonction sur des intervalles `OUVERTS` puis aux points restants (aux bords des intervalles ouverts considérés).

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

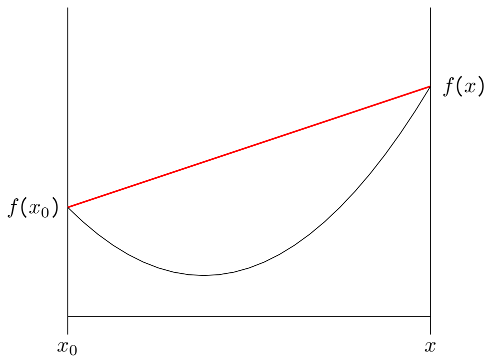
1. Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel x positif et renvoie le réel $f(x)$.
3. Écrire un script **Python** (utilisant la fonction précédente) permettant de tracer le graphe de la fonction f sur le segment $[0, 3]$. On pourra utiliser la commande `np.linspace` ou `np.arange`.

3.2 Taux d'accroissement

Definition 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On appelle *taux d'accroissement* de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

Remarque 6 (Interprétation graphique)*.* Notons $M = (x, f(x))$ et $M_0 = (x_0, f(x_0))$ deux points de la courbe représentative de f. Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M.



Remarque 7 (Interprétation physique)*.* Si f décrit l'évolution d'une distance parcourue par un mobile se déplaçant en ligne droite, alors

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est la vitesse moyenne de ce mobile entre l'instant x_0 et l'instant x. En effet, $f(x) - f(x_0)$ est la distance parcourue entre ces deux instants.

3.3 Dérivabilité d'une fonction en un point

Definition 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

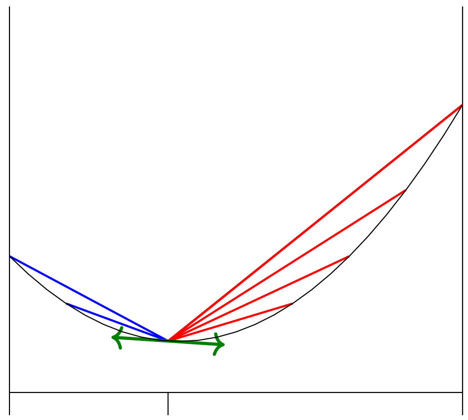
1. On dit que f *est dérivable en* x_0 lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0.
2. Lorsque cette limite existe, elle est appelée *nombre dérivé de* f *en* x_0 et est notée $f'(x_0)$. Autrement dit :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Remarque 8. Dire qu'une fonction f est dérivable en x_0 c'est dire que la fonction taux d'accroissement se prolonge par continuité en x_0 en posant $\tau_{x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple 9. La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Remarque 9 (Interprétation graphique).



Exercice 2 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Démontrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Que vaut $f'(0)$?

3.4 Tangentes à la courbe représentative

Definition 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1. Si f est dérivable en x_0, on appelle *tangente de* f *en* x_0 la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$. Autrement dit, c'est la droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2. Si f est dérivable à gauche en x_0, on appelle *demi-tangente à gauche de* f *en* x_0 la demi-droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

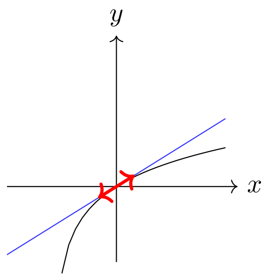
3. Si f est dérivable à droite en x_0, on appelle *demi-tangente à droite de* f *en* x_0 la demi-droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

Exemple 10. 1. La tangente de $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0 a pour équation :

$$y = x$$

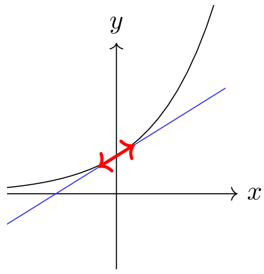
En effet, $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. On en déduit que pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$ par concavité. Représentation de la tangente :



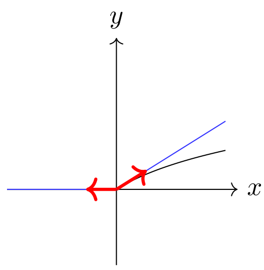
2. La tangente de $f : x \mapsto e^x$ en 0 a pour équation :

$$y = x + 1$$

En effet, $f(0) = e^0 = 1$ et $f'(x) = e^x$ donc $f'(0) = 1$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$ par convexité. Représentation de la tangente :



3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. La fonction f admet deux demi-tangentes en 0.

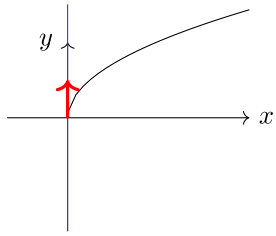


Definition 7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Supposons que :

1. f est continue en x_0
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) *(f est donc non dérivable en x_0)*

On appelle alors *tangente verticale de f en x_0* la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$. Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

Exemple 11. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$. La fonction f admet une tangente verticale en 0.



3.5 Démontrer de la régularité pour une composée

Méthode. Soit $f = g \circ h$. On veut montrer que f est dérivable (par exemple) sur un intervalle I. La démonstration suit toujours le même schéma :

- la fonction g est dérivable sur J (on donne ici le plus grand intervalle J possible)
- la fonction h est dérivable sur I et vérifie $h(I) \subset J$

On peut alors conclure que f est dérivable sur I.

Remarque 10. On peut remplacer « dérivable » par « continue » ou « de classe $\mathcal{C}^1$ » ou « de classe $\mathcal{C}^2$ ».

4 Tracer la courbe représentative d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On veut tracer $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f.

Ordre des tracés :

1. On place les points remarquables
   - $(x_0, 0)$ si $f(x_0) = 0$
   - $(x_0, f(x_0))$ si $f'(x_0) = 0$
   - $(x_0, f(x_0))$ si x_0 est au bord de l'intervalle I
2. On place les tangentes remarquables
   - les tangentes horizontales
   - les (demi-)tangentes calculées aux questions précédentes
   - les tangentes verticales
3. On trace les éventuelles asymptotes verticales et horizontales
4. On trace la courbe d'un seul coup de crayon, en passant par les points remarquables, en suivant la direction des tangentes et en respectant les contraintes suivantes :
   (a) La monotonie doit être respectée sur les différents intervalles
   (b) Le graphe doit être cohérent avec les limites calculées
   (c) En cas d'étude de la dérivée seconde, il faut respecter la concavité/convexité de la courbe

Exercice 3 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

et on suppose que $f'(0) = -2$. Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 4 : Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	1		α		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$		$+$		0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

et le tableau de variations de f' est donné par

x	1		2		β		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$\Vert$		$-$		0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f'(\beta)$	$\nearrow$	0

Tracer $\mathscr{C}_f$.

5 Notion de développement limité

5.1 Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point

5.1.1 $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et approximation affine de f en x_0

Definition 8. Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f possède *un développement limité d'ordre* 1 *en* x_0 si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction ε définie au voisinage de x_0 tels que :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Si c'est le cas, on dit que la fonction $g : x \mapsto a + b\,(x - x_0)$ est une *approximation affine de f au voisinage de x_0*.

Remarque 11. Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors on a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - g(x) = 0$. Ainsi, les courbes représentatives de f et de la droite d'équation $y = a + b\,(x - x_0)$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0.

Théoreme 8. *Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.*

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f \text{ admet un développement limité d'ordre } 1 \text{ en } x_0$$

Si c'est le cas, alors les coefficients du développement limité sont : $\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{cases}$ *et donc il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que au voisinage de x_0 :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. *En particulier, il y a unicité du développement limité de f en x_0 à l'ordre* 1.

Remarque 12. Parmi toutes les droites, la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

est celle qui représente le mieux le graphe de f au voisinage de x_0. On retrouve l'équation de la tangente en x_0.

5.1.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Théoreme 9 (Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1))**.** *Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en x_0, son $\mathrm{DL}_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$$

Démonstration. On a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\frac{(x - x_0)\varepsilon(x)}{x - x_0} = \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

et donc $(x - x_0)\varepsilon(x) = \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$. □

Théoreme 10 (Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1) en 0)**.** *Si f est dérivable en 0, son $\mathrm{DL}_1(0)$ s'écrit sous la forme :*

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

Remarque 13. De la précédente formule, on déduit que si $f'(x_0) \neq 0$, alors $f(x) - f(0) \underset{x \to 0}{\sim} f'(0)x$.

Théoreme 11 (Formules de Taylor-Young usuelles)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. $\ln(1 + x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$
2. $e^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}(x)$
3. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x \to 0}{o}(x)$. *D'où :*
   (a) $\sqrt{1 + x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \underset{x \to 0}{o}(x)$ ($\alpha = \frac{1}{2}$)
   (b) $\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + \underset{x \to 0}{o}(x)$ ($\alpha = -1$)

Remarque 14. On retrouve alors les équivalents usuels :

1. $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.
2. $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.
3. $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$ (si $\alpha \neq 0$).

Exemple 12. On peut maintenant calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x}$. On écrit

$$\begin{array}{ll} & \ln(1 + x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x) \\ \text{donc} & \ln(1 + x) - x = \underset{x \to 0}{o}(x) \\ \text{donc} & \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x} = 0 \end{array}$$

mais on ne peut pas encore calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$. Il nous faut les DL à l'ordre 2.

5.2 Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point

5.2.1 $\mathrm{DL}_2(x_0)$ et approximation quadratique de f en x_0

Definition 9. Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f possède *un développement limité d'ordre* 2 *en* x_0 si il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et une fonction ε définie au voisinage de x_0 tels que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)}$$

Si c'est le cas, on dit que la fonction $g : x \mapsto a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$ est une *approximation quadratique de f au voisinage de x_0.*

Remarque 15. Si f admet un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ alors : $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = 0$. Ainsi, les courbes représentatives de f et g ont tendance à se confondre à proximité de x_0. La courbe représentative de g est la parabole qui épouse le mieux le graphe de f au voisinage de x_0.

Exemple 13. Soit $f : x \mapsto 1 + x^2 + x^4$. Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f est $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

5.2.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théoreme 12. *Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable en x_0. Alors f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0 dont les coefficients sont :*

$$\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \\ c = \dfrac{f''(x_0)}{2} \end{cases}$$

Son $\mathrm{DL}_2(x_0)$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

Théoreme 13. *Il y a unicité du développement limité à l'ordre 2.*

Théoreme 14 (Formule de Taylor-Young (à l'ordre 2) en 0)**.** *Soit f définie dans un voisinage de 0. Si f est deux fois dérivable en 0, son $\mathrm{DL}_2(0)$ s'écrit sous la forme :*

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$$

5.2.3 Développements limités usuels en 0

Théoreme 15. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
3. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *et en particulier :*
   (a) $\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
   (b) $\boxed{\sqrt{1 + x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$

5.2.4 Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

Théoreme 16. *Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable en x_0 et que $f''(x_0) \neq 0$. Alors, la position locale de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente en x_0 est donnée par le signe de $f''(x_0)$. Plus précisément :*

- *si $f''(x_0) > 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de sa tangente.*
- *si $f''(x_0) < 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de sa tangente.*

Démonstration. On a, dans un voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right) &= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right) \\ &\underset{x \to x_0}{\sim} \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

□

5.3 Calcul pratique des développements limités

5.3.1 Changement de variable $x \leftarrow -x$

Considérons le DL $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$. En remplaçant x par $-x$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln(1 - x) &= (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left((-x)^2\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

On obtient le DL usuel

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Considérons le DL $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$. En remplaçant x par $-x$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 - (-x) + (-x)^2 + \underset{x \to 0}{o}\left((-x)^2\right) \\ &= 1 + x + x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

On obtient le DL usuel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Il faut toujours penser aux parenthèses quand on fait une substitution.

5.3.2 Troncature

On peut tronquer le $DL_2(0)$ pour obtenir le $DL_1(0)$. Il suffit de remplacer les termes d'ordre 2 par $\underset{x \to 0}{o}(x)$.

Par exemple, si $f(x) = 1 + 3x + 2x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$, alors $f(x) = 1 + 3x + \underset{x \to 0}{o}(x)$

5.3.3 Calcul via les dérivées (application concrète de la formule de Taylor-Young)

Soit $f : x \mapsto x^2 e^x + 3x$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(2 + x)e^x + 3 \\ f''(x) &= (2 + 4x + x^2)e^x \end{aligned}$$

donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$ et $f''(0) = 2$. D'où :

$$f(x) = 3x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

5.3.4 Somme, produit et composition de DL

On peut faire la somme et le produit de deux DL.

Exercice 5 : (Somme de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x} + x$ puis de $x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 6 : (Produit de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto (1+x)\mathrm{e}^x$ puis de $x \mapsto (x-1)\ln(1+x)$.

Exercice 7 : (Composition de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1+2x)$ puis de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

5.4 Calcul d'un équivalent à l'aide d'un développement limité

Théoreme 17. *Soit f une fonction qui admet un $\mathrm{DL}_2(0)$: $f(x) = a + bx + cx^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.*

- *Si $a \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a$.*
- *Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} bx$.*
- *Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} cx^2$.*