Table des matières

1 Notion de série à termes réels

Definition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- On appelle *série de terme général* u_n et on note $\sum u_n$ (ou $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$) la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- La suite (S_n) est appelée *suite des sommes partielles* associée à la série $\sum u_n$. Son terme général S_n est appelé *somme partielle d'ordre* n associée à la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ est *convergente* si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la série $\sum u_n$ est *divergente* si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
- Lorsque $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *somme de la série* et est notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ (on la note aussi souvent S mais il faut alors définir cette notation). On a alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

- Déterminer la *nature* d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Proposition 1. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *une série. Soit* $n_0 \geqslant 1$.

- *Les séries* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ *ont même nature.*
- *En cas de convergence, les sommes des deux séries sont a priori différentes.*

Démonstration. Soit $n \geqslant n_0$. On a

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right)$$

En cas de convergence :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right)$$

□

Remarque 1. Il est fréquent de devoir utiliser cette formule lors de calculs de sommes usuelles qui ne commencent pas à 0.

Notation	Type d'objet	Nom	Remarques
(u_n)	Suite	Suite de terme général u_n	Il ne faut pas confondre la notion de nature d'une série $\sum u_n$ et la notion de nature de la suite (u_n)
u_n	Nombre réel	Valeur de la suite (u_n) au rang n	Penser à introduire le n avant tout calcul
$\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$	Suite	Série de terme général u_n	Privilégier cette notation si l'on veut parler de la nature de la série $\sum u_n$
(S_n)	Suite	Suite des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$	Privilégier cette notation si l'on veut parler de monotonie
$\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$	Nombre réel	Somme partielle d'ordre n associée à la série $\sum u_n$	Penser à introduire le n avant tout calcul
$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$	Nombre réel	Somme de la série $\sum u_n$	N'a de sens qu'après avoir prouvé la convergence de la série $\sum u_n$

2 Méthodes pour déterminer la nature d'une série

2.1 Reconnaitre une divergence grossière

Théoreme 2. *Soit (u_n) une suite de réels.*

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Pour qu'une série converge, il **faut** *que son terme général tende vers* 0.

Remarque 2. Attention, cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Autrement dit, on peut trouver une suite (u_n) telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ sans que $\sum u_n$ converge. Par exemple, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ n'est pas convergente (on le verra plus tard).

Il faut savoir manipuler la contraposée du théorème précédent.

Théoreme 3. *Soit (u_n) une suite de réels. Si (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Definition 2. Soit (u_n) une suite de réels. On dit que la série $\sum u_n$ est *grossièrement divergente* si son terme général u_n ne tend pas vers 0.

D'après le théorème précédent, toute série grossièrement divergente est divergente. Quand on étudie la nature d'une série, on commence toujours par vérifier si c'est une série grossièrement divergente car c'est le cas le plus simple à traiter.

Exemple 1. Les séries :

$$\sum 1,\ \sum n,\ \sum n^2,\ \sum n^3 \ \text{ et } \ \sum q^n \text{ avec } |q| \geq 1$$

sont (grossièrement) divergentes.

Remarque 3. L'idée derrière ce théorème est que pour assurer la convergence d'une série $\sum u_n$ (*i.e.* pour pouvoir faire une somme infinie des termes de la suite (u_n)), il faut *a minima* que les termes de cette suite (u_n) deviennent « suffisamment petits ». En particulier, si (u_n) converge vers $\ell \neq 0$, alors elle est « trop grosse » pour qu'on puisse espérer effectuer la somme (infinie) de tous ses termes.

2.2 Somme de deux séries

Théoreme 4. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On pose $z_n = u_n + v_n$.*

1. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors $\sum z_n$ est convergente.*
2. *Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum z_n$ est divergente.*
3. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire sur $\sum z_n$.*

Exemple 2. Si $u_n = n$ et $v_n = n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes et $\sum z_n$ est également divergente. Si $u_n = n$ et $v_n = -n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes mais $\sum z_n$ est convergente.

2.3 Reconnaitre et utiliser des sommes télescopiques

Definition 3. Une *somme télescopique* est une somme de la forme $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k$ où $n \in \mathbb{N}$ et où (u_n) est une suite.

Exemple 3.

1. À l'aide d'un télescopage, on démontre la divergence de $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. En effet, le terme général de cette série vérifie :
$$v_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$
Ainsi, la somme partielle d'ordre n de $\sum v_n$ est :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
et donc la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente.
Il faut savoir repérer la technique de télescopage même lorsqu'elle est cachée comme ici.
2. On peut aussi montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.
Remarquons que : $\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. On a donc :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
Le deuxième exemple illustre quant à lui la technique de décomposition en élément simple (DES) qu'il est fréquent de voir associée à un télescopage.

Application à l'étude de la série $\sum \frac{1}{n}$.

Proposition 5. *La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.*

Démonstration. On commence par remarquer (par concavité) que :
$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$$
On en déduit que
$$\forall k \geq 1,\ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$
Par sommation sur k, on obtient que
$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \to +\infty$$
Par théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. □

Application à l'étude de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Proposition 6. *La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.*

Démonstration. On commence par remarquer que :

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

Par sommation sur k, on obtient que

$$\forall n \geq 2,\ S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

Or la suite (S_n) est croissante, donc par théorème de convergence monotone, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. □

Exercice 1 : On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Trouver trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$
2. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.

2.4 Calcul direct des sommes partielles : séries usuelles

2.4.1 Sommes des puissances d'entiers.

Somme des n premiers entiers

Proposition 7.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$S_n - S_{m-1} = \boxed{\sum_{k=m}^{n} k \ = \ \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}}$$

Remarque 4. La formule donnant la valeur de $S_n - S_{m-1}$ peut se retenir comme étant le résultat du **produit** :

- **du nombre de termes** de la somme : $(n-m+1)$,
- **par la moyenne** $\frac{n+m}{2}$ entre le **plus petit terme** m et le **plus grand terme** n.

Sommes des n premiers carrés d'entiers.

Proposition 8.

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Sommes des n premiers cubes d'entiers.

Proposition 9.

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} \ = \ S_n^2$$

2.4.2 Série géométrique et ses dérivées

Definition 4. Soit $q \in \mathbb{R}$.

- La série $\sum q^n$ est appelée *série géométrique de raison q.*
- La série $\sum\limits_{n\geq 1} n\ q^{n-1}$ est appelée *série géométrique dérivée de raison q.*
- La série $\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)\ q^{n-2}$ est appelée *série géométrique dérivée seconde de raison q.*
- etc (les suivantes sont hors-programme)

Théoreme 10. *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

1. $\boxed{\sum q^n \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$
2. $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} n\ q^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$
3. $\boxed{\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)\ q^{n-2} \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

*De plus, si $|q| < 1$ (*i.e. *si $q \in\ ]-1,1[$), on obtient les sommes suivantes :*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}}, \quad \boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}}$$

Remarque 5. Les formules précédentes de sommes restent valables avec une initialisation à $n = 0$ puisque les termes ajoutés sont nuls.

Dans les exercices, il faut savoir reconnaître les séries géométriques et géométriques dérivées et savoir calculer leur somme.

Exemple 4.

- La série $\sum 3^n$ est divergente car c'est une série géométrique de raison $q = 3$ avec $|q| \geq 1$.
- La série $\sum \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ avec $|q| < 1$.
- La série $\sum n\left(-\frac{3}{5}\right)^n$ est convergente car $\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(-\frac{3}{5}\right)^k = -\frac{3}{5}\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$ et on reconnait une série géométrique dérivée de raison $q = -\frac{3}{5}$ avec $|q| < 1$.
- Montrons que $\sum \dfrac{n}{3^{2n+1}}$ est convergente et calculons sa somme. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_k = \frac{k}{3^{2k+1}} = k\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = \frac{1}{3}\ k\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^k$$

  On a donc : $S_n = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(\dfrac{1}{9}\right)^k = \dfrac{1}{27}\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(\dfrac{1}{9}\right)^{k-1}$

  C'est la somme partielle d'une série géométrique dérivée qui est convergente car de raison $\dfrac{1}{9} \in\ ]-1,1[$.

  Ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{27}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^2} = \dfrac{1}{3\times 9}\dfrac{9^2}{8^2} = \dfrac{3}{64}$.

- Montrons que $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$ est convergente et calculons sa somme. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $u_k = k^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$. En écrivant : $k^2 = k(k-1) + k$, on obtient :

$$u_k = k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4}\ k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2}\ k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

  On a donc : $S_n = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$. On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée et la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde toutes deux convergentes car de raison $\dfrac{1}{2} \in\ ]-1,1[$. Ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{2^4}{4} + \dfrac{2^2}{2} = 4 + 2 = 6$

2.4.3 Série exponentielle

Théoreme 11. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x}$$

Autrement dit, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Dans les exercices, il faut être capable de reconnaître la série exponentielle et calculer la somme associée.

$$\boxed{\text{On doit penser à la série exponentielle dès que l'on voit une factorielle.}}$$

Exemple 5. Montrons que $\sum \frac{1}{2^n n!}$ est convergente est calculons sa somme.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

Exemple 6. Montrons que $\sum \frac{n+7}{2^n\, n!}$ est convergente est calculons sa somme. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $u_k = \frac{k+7}{2^k\, k!} = \frac{k\,\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + 7\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$. On a donc : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k\,\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + 7\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$. Étudions séparément ces deux sommes.

- Tout d'abord :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k\,\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$
- D'autre part, on a : $\displaystyle 7\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 7\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

On en conclut que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{15}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2}\,\sqrt{\mathrm{e}}$.

Exemple 7. Nature et somme de $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{(n-2)!}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+3}{(n-1)!}$?

2.5 Séries de Riemann

Théoreme 12 (Critère de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors :*

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

Exemple 8.

- les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ sont convergentes.
- les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont divergentes.

Remarque 6. Le critère de Riemann ne permet pas de calculer la somme d'une série.

2.6 Séries à termes positifs

Definition 5. On dit qu'une série $\sum u_n$ est *à termes positifs* si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$$

Dans cette partie, on va énoncer un certain nombre de résultats qui portent sur les séries à termes positifs. Ces résultats sont faux dans le cas général. Dans un exercice, on tombera parfois sur une série $\sum u_n$ à termes négatifs, on pourra alors se ramener aux résultats de cette partie en considérant la série $\sum v_n$ où $v_n = -u_n$ et en remarquant que pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = -\sum_{k=0}^{n} v_k$$

2.6.1 Les résultats fondamentaux

Théoreme 13. *Soit $\sum u_n$ une série et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée.*

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0) \quad \Rightarrow \quad (S_n) \text{ est croissante}}$$

i.e. *si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors (S_n) est croissante.*

Théoreme 14. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On a la dichotomie suivante :*

1. $\boxed{(S_n) \text{ est majorée} \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ converge}}$
2. $\boxed{(S_n) \text{ non majorée} \ \Rightarrow\ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

Exemple 9. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2 2^n} \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 1$$

Donc la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.

2.6.2 Critère de comparaison des séries à termes positifs

Théoreme 15 (Critère de comparaison des séries à termes positifs)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$.*

1. *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Remarque 7. La conclusion reste valable avec l'hypothèse moins stricte suivante :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq v_n$$

(la convergence d'une série ne dépend pas des 1^{er} termes $u_0, \ldots, u_{n_0}$)

Exemple 10. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \qquad v_n = \frac{1}{n^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge (série de Riemann) mais $\sum u_n$ ne converge pas.

2.6.3 Critère de négligeabilité des séries à termes positifs

Théoreme 16 (Critère de négligeabilité)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.*

1. *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

2.6.4 Critère d'équivalence des séries à termes positifs

Théoreme 17 (Critère d'équivalence)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Remarque 8. Ces trois théorèmes sont importants. Ils signifient que pour déterminer la nature d'une série à termes positifs, il suffit de comparer son terme général à celui d'une série de référence (dont on connaît la nature).

$\boxed{\text{On compare toujours les termes généraux, jamais les sommes partielles.}}$

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

1. $\sum \dfrac{n^2-n}{n^3}$
2. $\sum \dfrac{n^2+n}{n^3}$
3. $\sum \dfrac{e^{-n}}{n^2}$
4. $\sum \dfrac{(\ln n)^a}{n}$ (où $a \in \mathbb{R}^+$)
5. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$
6. $\sum \dfrac{n+1}{(n+3)^2}$
7. $\sum n^4 e^{-n}$
8. $\sum n^n e^{-n}$
9. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
10. $\sum \dfrac{1}{n\,2^n}$
11. $\sum e^{\frac{1}{n^2}}$
12. $\sum \dfrac{1}{3^n-2^n}$
13. $\sum \dfrac{n+2}{n^3+1}$
14. $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$
15. $\sum \dfrac{n}{\ln(n)}$
16. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$
17. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
18. $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$
19. $\sum \dfrac{3^{\frac{1}{n}}-1}{n}$
20. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$
21. $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
22. $\sum \dfrac{1}{n^2-n}$
23. $\sum \dfrac{1}{e^n+e^{-n}}$
24. $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+n^4}{2n^4}\right)$
25. $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3-5n+1}}$
26. $\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$
27. $\sum \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$
28. $\sum \left(\dfrac{5n+1}{6n+2}\right)^n$
29. $\sum \dfrac{n!+1}{(n+1)!}$
30. $\sum \dfrac{1}{2^n+3^n}$
31. $\sum \dfrac{2^n+n}{n2^n}$
32. $\sum \dfrac{2^n+n}{n^2 2^n}$
33. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
34. $\sum e^{-\sqrt{n}}$
35. $\sum \dfrac{n^2+3n+1}{n^8+8n^5+7n}$
36. $\sum \dfrac{-5n^2+3n-8}{n^8-8n^5-7n}$

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2 \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.
4. Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. En déduire la nature de $\sum u_n$.

2.7 Notion de convergence absolue

Definition 6. Soit $\sum u_n$ une série. La série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théoreme 18. *(Inégalité triangulaire) Soit $\sum u_n$ une série. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente. Dans ce cas, on a*

$$\boxed{\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|}$$

Remarque 9. La notion d'absolue convergence n'est pas équivalente à la notion de convergence. Plus précisément : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. On parle alors parfois de série **semi-convergente** (notion hors-programme) pour désigner une série convergente mais non absolument convergente. Par exemple la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Remarque 10 (Un point sur le BO.). La notion de convergence absolue « est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète ».

2.8 Comparaison série/intégrale

Exercice 4 :*(d'après* `EML 1992`*)*
On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que : $\forall k \geq 3$, on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leq f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note : $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3. (a) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(t)\ dt \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$:
   $$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$
   (c) Établir que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
5. (a) Montrer, pour tout entier $n \geq 2$: $0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$.
   (indication : on pourra commencer par démontrer que $v_n - \ell \leq v_n - u_n$)
   (b) En déduire un programme en **Python** qui calcule et affiche une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.