Table des matières

1 Notion de suite

1.1 Définition générale

Definition 1. Une *suite (de nombre réels)* u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{cases}$$

Notation 1.

- On notera u_n à la place de $u(n)$.
- Pour cet élément u_n, on préférera parler de *valeur de la suite au rang* n ou encore de *terme général de la suite.*
- Une telle application u sera généralement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n).

Exemple 1. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$.

- $(u_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ est une suite.

  Il ne faut pas **introduire** le n avant d'écrire (u_n), car n est une variable **liée** dans cette écriture.
- $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_{10} = \frac{1}{10}$, $u_n = \frac{1}{n}$ sont des nombres.

  Il faut **introduire** le n avant d'écrire u_n, car n est une variable **libre** dans cette écriture.

Dans les exercices, les suites peuvent être définies de trois manières différentes.

1. Par formule **explicite**.

   Exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3n - 2$.

2. Par formule **récurrente** : $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Exemple : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$.

3. Par formule **implicite** : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(u_n) = 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = n$.

   Exemples : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^3 + 2u_n - \ln(1+n) = 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n e^{u_n} = n$

1.2 Propriétés, vocabulaire

1.2.1 Sens de variations

Definition 2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

- *croissante* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
- *strictement croissante* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$
- *décroissante* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$
- *strictement décroissante* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$
- *(strictement) monotone* si elle est (strictement) **croissante** ou (strictement) **décroissante**.
- *constante* si : **il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$**, *i.e.*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n}$$

- *stationnaire* si : **elle est constante à partir d'un certain rang**, *i.e.*

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0})}$$

Méthode. Il existe deux méthodes pour montrer qu'une suite (u_n) est croissante :

1. Remarquons que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$
Ainsi, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode est particulièrement adaptée lorsque u_n est donné sous forme de **somme**.
2. On suppose ici que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On a alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$
Ainsi, on peut étudier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1. Cette méthode est particulièrement adaptée lorsque u_n est donné sous forme de **produit** et **ne change pas de signe**.

Remarque 1. Lorsque l'on souhaite démontrer de manière directe (sans passer par une récurrence) une propriété de la forme « $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ », il faut commencer par fixer un entier n. On écrira alors : **Soit** $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 : Trouver le sens de variations des suites suivantes à l'aide de la première méthode.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -3n^2 + 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(1+k)}{e^k}$
5. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 5u_n + 4 \end{cases}$

Exercice 2 : Trouver le sens de variations des suites suivantes à l'aide de la deuxième méthode.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+2)^3$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (k+1)^2$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^{-\sqrt{k}}$
5. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{u_n} \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

Exercice 3 : Trouver le sens de variations des suites suivantes en choisissant la méthode la plus adaptée.

1. $\forall n \geqslant 1, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k+2}$
2. $\forall n \geqslant 2, u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
3. $\forall n \geqslant 1, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
4. $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$
5. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$

1.2.2 Bornes

Definition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soient $M \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

- On dit que M est un *majorant* de (u_n) (ou que (u_n) est *majorée* par M) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
- On dit que (u_n) est *majorée* si elle admet un majorant, *i.e.* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$
- On dit que m est un *minorant* de (u_n) (ou que (u_n) est *minorée* par m) si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant M$
- On dit que (u_n) est *minorée* si elle admet un minorant, *i.e.* $\exists y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant y$
- On dit que (u_n) est *bornée* si elle est à la fois **minorée** et **majorée**.

Proposition 2. *On a les équivalences suivantes*

$$\begin{aligned}\text{\textit{La suite } } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ \textit{est bornée}} &\iff \exists (m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ -C \leqslant u_n \leqslant C \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant C \\ &\iff \text{\textit{La suite} } (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ \textit{est majorée}}\end{aligned}$$

Exemple 2. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.
On remarque que 0 et 1 sont des **minorants** de (u_n).

Exemple 3. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{-n}$.
On remarque que 1 est un **majorant** de (u_n).

Remarque 2. Si une suite (u_n) admet un majorant M, alors tout réel $R \geq M$ est aussi majorant de la suite puisqu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M \leqslant R$. Ainsi, on retiendra que

Si une suite (u_n) admet un majorant, alors elle en admet une infinité.

L'expression « M est **le** majorant de la suite (u_n) » est donc **incorrecte**.

Remarque 3. Attention, un majorant d'une suite (u_n) est un réel **indépendant** de la valeur de n. Par exemple, si on a (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n^2$, **on ne peut pas** en conclure que (u_n) est majorée par n^2.

Exemple 4. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.
On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n^2$. Pour autant, la suite (u_n) n'est pas **majorée**.

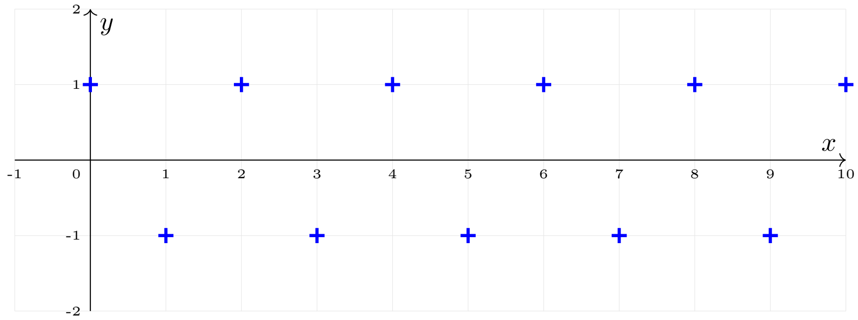
Exercice 4 : On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$. Montrer que 1 est un minorant de (u_n) et que 2 est un majorant de (u_n). Proposer d'autres minorants et d'autres majorants.

Definition 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

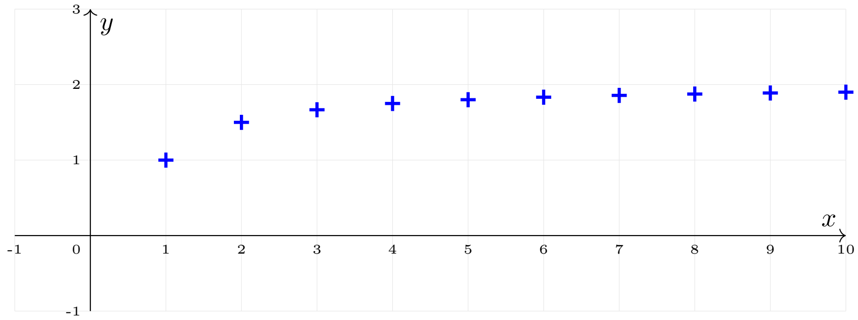
- On dit qu'une suite (u_n) admet un *maximum* atteint au rang n_0 si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n_0}$.
  Dans ce cas, le nombre u_{n_0} est appelé le **maximum** de la suite (u_n). Ce maximum est nécessairement unique et est noté $\max_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- On dit qu'une suite (u_n) admet un *minimum* atteint au rang n_0 si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n_0}$.
  Dans ce cas, le nombre u_{n_0} est appelé le **minimum** de la suite (u_n). Ce minimum est nécessairement unique et est noté $\min_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exemple 5. Le maximum (resp. le minimum) d'une suite peut être atteint en plusieurs **rangs** . Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

- Le maximum de cette suite est 1. Il est atteint aux rangs $0, 2, 4, \dots$.
- Le minimum de cette suite est -1. Il est atteint aux rangs $1, 3, 5, \dots$.



Exercice 5 : On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = 2 - \frac{1}{n}$. La suite (u_n) admet-elle un maximum et/ou un minimum ? Si oui, en quels rangs sont-ils atteints ?

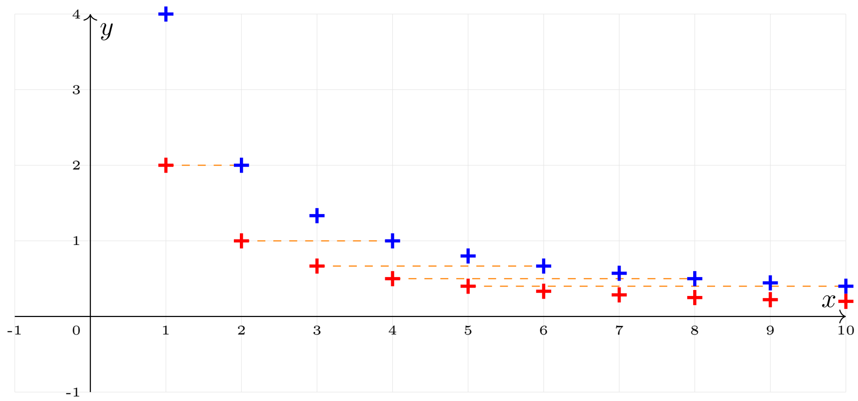


1.2.3 Suites extraites

Definition 5. Soit (u_n) une suite. Une *sous-suite* (ou *suite extraite*) de (u_n) est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application **strictement croissante** .

Remarque 4. L'idée derrière cette définition est que l'on choisit certains nombres de la suite (u_n), sans changer l'ordre dans lequel ils étaient rangés.

Exemple 6. On considère la suite $(u_n) = \left(\frac{4}{n}\right)$ et on note $(v_n) = (u_{2n})$. On trace la suite (u_n) en bleu et la suite (v_n) en rouge.



Proposition 3. *Soit (u_n) une suite. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).*

Exemple 7. Considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

- Si on note $(v_n) = (u_{2n})$, alors (v_n) est une suite extraite de (u_n) définie par :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n =$$

- Si on note $(w_n) = (u_{2n+1})$, alors (w_n) est une suite extraite de (u_n) définie par :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n =$$

- La suite $(u_{3n+2})_{n\geqslant 0}$ est aussi une suite extraite de (u_n).
- La suite $(u_{\ln(n)})_{n\geqslant 1}$ n'est pas une suite extraite de (u_n), car $\ln(2)$ n'est pas un entier par exemple.

Exercice 6 : On considère la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Déterminer le sens de variation des suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

2 Suites usuelles

2.1 Suites arithmétiques

Definition 6. Une suite (u_n) est dite *arithmétique* si il existe un réel r (appelé *raison*) tel que : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$.

Théoreme 4 (Caractérisation des suites arithmétiques)**.** *Soit (u_n) une suite et r un nombre réel.*

$$\boxed{(u_n) \textit{ est une suite arithmétique de raison } r \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = nr + u_0}$$

Exemple 8. La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ a pour formule explicite : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n + 3}$.

2.2 Suites géométriques

Definition 7. Une suite (u_n) est dite *géométrique* si il existe un réel q (appelé *raison*) tel que : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n}$.

Théoreme 5 (Caractérisation des suites géométriques)**.** *Soit (u_n) une suite et q un nombre réel.*

$$\boxed{(u_n) \textit{ est une suite géométrique de raison } q \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n}$$

Exemple 9. La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$ a pour formule explicite : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 5^n}$.

Théoreme 6 (Somme des termes d'une suite géométrique)**.** *Soit $q \in \mathbb{R}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$.*

1. *Si $q \neq 1$, alors*

   $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \quad\quad}$$

   et

   $$\boxed{\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}}$$

2. *Si $q = 1$, alors*

   $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1}$$

Remarque 5. Si on calcule une somme qui ne s'arrête pas à n (par exemple à $n+1$), on substitue l'expression dans le n de la formule générale, à l'aide de parenthèses. C'est un principe général.

Exemple 10. Soit $q \neq 1$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{2n+1} q^k =$$

2.3 Suites arithmético-géométriques

2.3.1 Définitions

Definition 8. Une suite (u_n) est dite *arithmético-géométrique* si il existe un réel $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et un réel $b \neq 0$ tels que $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b}$.
On appelle *équation de point fixe* associée à la suite (u_n) l'équation (en la variable x) suivante

$$x = ax + b$$

Remarque 6. Les solutions de cette équation sont les points fixes de la fonction $f(x) = ax + b$.

2.3.2 Méthode d'étude

Méthode. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique.
Pour trouver l'expression explicite de (u_n), on construit une suite géométrique en utilisant l'équation de point fixe.

Etape 1 : On commence par résoudre l'équation de point fixe $x = ax + b$.

Cette équation a pour solution $\lambda = \frac{b}{1-a}$.

Etape 2 : On introduit une suite auxiliaire (v_n) géométrique.

On sait que

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} u_{n+1} & = & a & \times & u_n & + & b \\ \lambda & = & a & \times & \lambda & + & b \end{array}\right.$$

et en faisant $L_1 - L_2$, on obtient

$$u_{n+1} - \lambda = a \times (u_n - \lambda)$$

On note alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$. D'après l'égalité précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = av_n$.

Etape 3 : Obtention de la formule explicite pour la suite (v_n).

La suite (v_n) est géométrique de raison a. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(*) \qquad v_n = v_0 a^n$$

Etape 4 : Obtention de la formule explicite pour la suite (u_n).

On remplace v_n par son expression en fonction de u_n dans la formule $(*)$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \lambda = (u_0 - \lambda)a^n$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + (u_0 - \lambda)a^n}$$

Remarque 7. Il ne faut pas apprendre cette formule par cœur. Il faut par contre connaître la méthode.

Exercice 7 : Trouver une formule explicite de (u_n) dans chacun des cas suivants en appliquant la méthode précédente.

1. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -4u_n + 5 \end{cases}$

Exercice 8 : On considère la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{array}\right.$.

1. Montrer que la suite (v_n), de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$, est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de u_n.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

2.4.1 Définitions

Definition 9.

- Une suite (u_n) est dite *récurrente linéaire d'ordre* 2 si il existe deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
- On associe à une telle suite un *polynôme caractéristique* $P(X) = X^2 - aX - b$ ainsi qu'une *équation caractéristique* $x^2 = ax + b$, de sorte que les solutions de l'équation caractéristique soient exactement les **racines** du polynôme caractéristique.

2.4.2 Méthode d'étude

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant l'équation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Pour étudier (u_n), on calcule les racines du polynôme caractéristique. La formule explicite de (u_n) dépend de ces racines et de leur nombre. On note Δ le discriminant du polynôme caractéristique pour effectuer une discussion par cas.

Théoreme 7. *Trois cas sont possibles selon le signe de Δ.*

Si $\Delta > 0$: alors le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. La formule explicite de (u_n) est donnée par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n} \tag{1}$$

où les réels λ et μ sont donnés par la résolution du système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & u_0 \\ r_1\lambda & + & r_2\mu & = & u_1 \end{array}\right.$$

Ce système est obtenu en remplaçant n par 0 et 1 dans (1).

Si $\Delta = 0$: alors le polynôme caractéristique admet une racine réelle double r. La formule explicite de (u_n) est donnée par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n} \tag{2}$$

où les réels λ et μ sont donnés par la résolution du système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & u_0 \\ r\lambda & + & r\mu & = & u_1 \end{array}\right.$$

Ce système est obtenu en remplaçant n par 0 et 1 dans (2).

Si $\Delta < 0$: alors le polynôme caractéristique n'admet aucune racine réelle. Une formule explicite pour la suite (u_n) existe mais est hors-programme.

Exercice 9 : Trouver une formule explicite de (u_n) dans chacun des cas suivants en utilisant le théorème précédent.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = \dfrac{10}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_n \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

3 Convergence, divergence

3.1 Définitions et propriétés élémentaires

3.1.1 Suites réelles convergentes

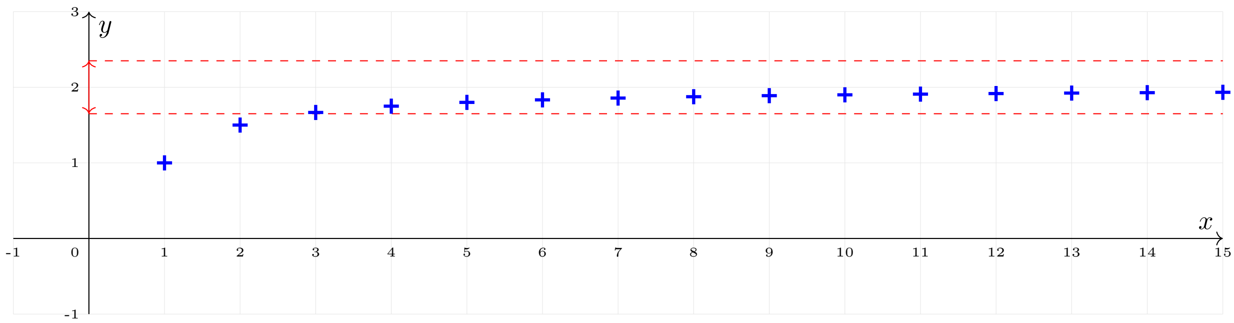
Definition 10. Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel. On dit que la suite (u_n) *converge vers* ℓ (ou admet la limite ℓ, ou tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux. Autrement dit, la suite (u_n) converge vers ℓ si, quelque soit l'intervalle ouvert I contenant ℓ que l'on se donne, les termes de la suite (u_n) appartiennent tous à I à partir d'un certain rang.
Lorsque (u_n) converge vers ℓ, on note :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Remarque 8. On prendra soin de ne pas mélanger ces deux notations.

Exemple 11. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,\ \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0.$

Exemple 12. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$. On représente ci-dessous un intervalle ouvert centré en 2 qui contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang :



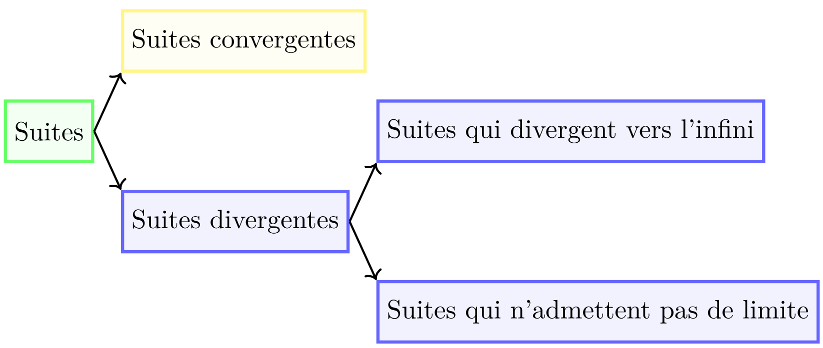
Definition 11 (Hors-Programme)**.** Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel. On dit que la suite (u_n) *converge vers* ℓ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

3.1.2 Suites réelles divergentes

Definition 12. Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) est *divergente* si elle n'est pas convergente. Autrement dit, la suite (u_n) est divergente si il n'existe pas de nombre réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ.

Remarque 9. Attention, une suite peut être divergente mais tout de même avoir une limite (infinie). On retiendra le diagramme qui suit.



Exemple 13.
- La suite $((-1)^n)$ diverge car **elle n'admet pas de limite**.
- La suite (e^n) diverge car **elle tend vers $+\infty$**.
- La suite $(\ln(n))$ diverge car **elle tend vers $+\infty$**.

3.1.3 Cas des limites infinies

Definition 13. Soit (u_n) une suite.
- On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ (ou tend vers $+\infty$) si

$$\boxed{\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n > A}$$

Lorsque (u_n) diverge vers $+\infty$, on note :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

- On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $-\infty$ si

$$\boxed{\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n < -A}$$

Lorsque (u_n) diverge vers $-\infty$, on note :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty}$$

Théoreme 8 (Unicité de la limite)**.** *Soit (u_n) une suite. Si (u_n) tend vers $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et vers $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell_1 = \ell_2$.*

3.1.4 Quelques propriétés élementaires issues des définitions

Proposition 9. *Soit (u_n) une suite.*
- *La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite* $(u_n - \ell)$ *converge vers* 0.
- *La suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite* $(|u_n|)$ *converge vers* 0.
- *Si la suite (u_n) est convergente, alors (u_n) est* ***bornée****. Autrement dit, une suite non* ***bornée*** *ne peut pas converger.*
- *Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute* ***suite extraite*** *de (u_n) converge également vers ℓ.*

Remarque 10. La suite $((-1)^n)$ est bornée mais n'est pas convergente. Il n'y a donc pas de réciproque au troisième point de la proposition 9.

Remarque 11. Le quatrième point de la proposition 9 fournit un critère de divergence.
- Si (u_n) admet une sous-suite divergente, alors (u_n) diverge.
- Si (u_n) admet deux sous-suites tendant vers deux limites distinctes, alors (u_n) diverge.

Exemple 14. D'après la remarque précédente, on peut montrer que la suite $((-1)^n)$ est divergente en considérant la sous-suite des termes pairs (qui converge vers 1) et la sous-suite des termes impairs (qui converge vers -1).

Proposition 10. *Soit (u_n) une suite. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.*

3.2 Opérations sur les limites

Dans la suite, on parle de *forme indéterminée* (et on note F.I.) quand on ne peut déterminer, de manière générale, la limite d'une opération sur les suites. Dans ce cas, il faudra faire une étude au cas par cas.

3.2.1 Somme de deux suites

Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$:

$u_n \backslash v_n$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_1	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Le cas de la somme de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{\infty - \infty}$

3.2.2 Produit de deux suites

Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$:

$u_n \backslash v_n$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_1 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Le cas du produit de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{0 \times \infty}$

3.2.3 Passage à l'inverse

Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$:

	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$			
	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
Cas où $u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	0	
Cas où $u_n < 0$ à partir d'un certain rang	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$		0

3.2.4 Quotient

Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$:

$u_n \backslash v_n$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0^+$	$\ell_2 = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 > 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$+\infty$	0	0
$\ell_1 < 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
$\ell_1 = 0$	0	0	F.I.	F.I.	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Le cas du quotient de deux suites apporte deux F.I. : $\boxed{\dfrac{0}{0} \quad ; \quad \dfrac{\infty}{\infty}}$

3.2.5 Techniques pour lever une F.I.

Tout d'abord résumons les F.I. rencontrées lors de l'étude des différentes opérations algébriques sur les limites :

$$\boxed{\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

Afin de lever une F.I., on pourra penser à utiliser l'une des méthodes (plus généralement une combinaison des méthodes) suivantes.

1. Penser à la quantité conjuguée lorsqu'il y a des racines.
2. Pour les fonctions puissances : retour à la définition à l'aide des fonctions exp et ln.
3. Penser aux croissances comparées.
4. Factoriser par le terme dominant (*i.e.* celui qui tend le plus vite vers $\pm\infty$ ou le moins vite vers 0).
   Cela revient à trouver un équivalent simple de la suite.
5. Utilisation d'inégalités précédemment démontrées. Le théorème d'encadrement est souvent utilisé pour déterminer un équivalent ou pour montrer qu'une suite tend vers 0.
6. Utilisation du taux d'accroissement.

Exercice 10 : Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans les cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+3}$
2. $u_n = (n^2-1)\mathrm{e}^n$
3. $u_n = (n^2-n^3)\mathrm{e}^n$
4. $u_n = n^{\sqrt{n}}$
5. $u_n = \dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$
6. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

3.3 Compatibilité avec la relation d'ordre

3.3.1 Démontrer des inégalités sur les limites pour les suites convergentes

Théoreme 11 (Passage à la limite dans les inégalités)**.** *Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.*

1. *Si il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant a$ alors on a :* $\underline{\ \ell \geqslant a\ }$.
2. *Si il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \leqslant b$ alors on a :* $\underline{\ \ell \leqslant b\ }$.
3. *Si il existe un rang n_0 à partir duquel $a \leqslant u_n \leqslant b$ alors on a :* $\underline{\ a \leqslant \ell \leqslant b\ }$.

Remarque 12. Attention, il faut vérifier que la suite (u_n) **converge** avant de pouvoir effectuer un tel passage à la limite. Autrement dit, il faut montrer que la limite existe avant de faire des opérations dessus. En particulier, il ne faut pas confondre ce résultat avec le théorème d'encadrement présenté plus tard dans le cours.
Typiquement, on pourra rédiger de la manière suivante :

« **Par passage à la limite (toutes les suites étant convergentes) :** »

Remarque 13. Attention, si $u_n > a$ à partir d'un certain rang, on ne peut pas conclure dans le cas général que $\ell > a$.

Exemple 15. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n < 2$ et pourtant ce serait une erreur de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n < 2$. En effet, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$. On retiendra que

Lorsque l'on passe à la limite dans des inégalités, les inégalités strictes deviennent larges

Théoreme 12 (Théorème de comparaison des limites)**.** *Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et soit (v_n) une suite convergente, de limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Supposons que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors* $\underline{\ \ell_1 \leqslant \ell_2\ }$.

3.3.2 Démontrer de la convergence

Théoreme 13 (Théorème d'encadrement)**.** *Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que*

- *la suite (u_n) est convergente, de limite ℓ,*
- *la suite (w_n) est convergente, de même limite ℓ,*
- *il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*

Alors ***la suite (v_n) est convergente, de limite ℓ***.

Remarque 14. Dans cet énoncé, on ne suppose pas que (v_n) est convergente mais on le **démontre**. Il ne s'agit donc pas d'un passage à la limite.

Exercice 11 :

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$
2. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) de termes généraux
$$u_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{2n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n$$

3.3.3 Démontrer de la divergence vers l'infini

Théoreme 14 (Théorème de comparaison)**.**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.

1. *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
2. *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors* $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

3.4 Théorèmes de monotonie

3.4.1 Théorème de convergence monotone

Théoreme 15 (Croissance et majoration)**.** *Soit (u_n) une suite et soit $M \in \mathbb{R}$ tels que*

- *la suite (u_n) est croissante,*
- *la suite (u_n) est majorée par M.*

Alors ***la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \leqslant M$***.

Remarque 15. Attention, une grosse erreur serait de conclure que (u_n) est convergente de limite M.

Exemple 16. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = 2 - \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 100. Elle est donc convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \leqslant 100$. Il est clair que $\ell = 2 \neq 100$.

Exercice 12 :

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
2. En déduire que la suite de terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ converge vers un réel $S \in \,]2,3]$.

Proposition 16. *Soit (u_n) une suite. Si (u_n) est croissante et converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.

Théoreme 17 (Décroissance et minoration)**.** *Soit (u_n) une suite et soit $m \in \mathbb{R}$ tels que*

- *la suite (u_n) est décroissante,*
- *la suite (u_n) est minorée par m.*

Alors ***la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant m$***.

3.4.2 Suites adjacentes

Definition 14. Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si

- (u_n) est croissante.
- (v_n) est décroissante.
- la suite $(u_n - v_n)$ **converge vers** 0.

Théoreme 18. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites.*
Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont ***convergentes*** *et admettent la* ***même limite****.*

Remarque 16. Attention à ne pas confondre la définition et le résultat. On ne sait pas qu'elles sont chacune convergentes a priori.

Exercice 13 : On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) converge.

4 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse dans cette partie à des suites définies par des relations de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \qquad \text{où } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction donnée}$$

Aux concours (EML/EDHEC/ECRICOME), les exercices portant sur de telles suites suivent toujours le même schéma :

1. Etude de la fonction f.
2. Etude de la suite (u_n).

Plus précisément, la partie sur la suite (u_n) ressemblera essentiellement à

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in I$ (où I est un certain intervalle).
2. Ecrire/compléter une fonction **Python** qui affiche les n premiers termes de la suite / le n^{e} terme de la suite.
3. Montrer que (u_n) est croissante / décroissante.
4. Au choix :
   (a) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
   (b) Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ / $-\infty$.
5. Au choix :
   (a) Ecrire/compléter une fonction **Python** qui affiche le premier entier n vérifiant $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-4}$.
   (b) Ecrire/compléter une fonction **Python** qui affiche le premier entier n vérifiant $u_n \geqslant 10^4$.
6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant M\,|u_n - \ell|$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant M^n\,|u_0 - \ell|$.

Exemple 17. On considère la fonction f définie, pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

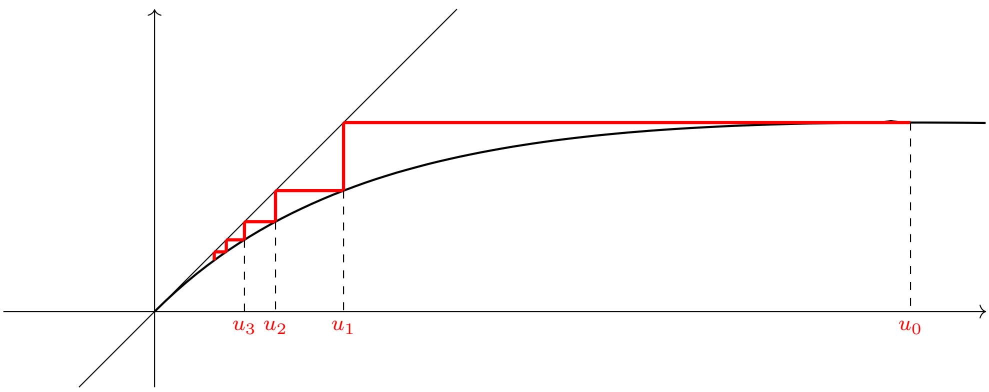
et on considère la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On commence par tracer le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

On trace ensuite son graphe :



Observations issues de la représentation graphique.

- Les éléments de la suite (u_n) semblent tous se retrouver dans $[0,1]$.
- La suite (u_n) semble décroissante.
- La suite (u_n) semble converger vers 0.

Toutes ces propriétés de la suite (u_n) peuvent se déduire de propriétés de la fonction f. Listons ces propriétés.

4.1 Présence d'un intervalle I stable par f

Definition 15 (Hors programme)**.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que l'intervalle I est *stable par* f si $f(I)\subset I$. Remarquons que

$$\begin{aligned} f(I)\subset I &\iff \forall x\in I, f(x)\in I \\ &\iff \forall x\in\mathbb{R}, [x\in I \ \Rightarrow\ f(x)\in I] \end{aligned}$$

Autrement dit, I est stable par f si f renvoie tous les éléments de I dans I.

Proposition 19 (Hors programme)**.** *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ stable par f. Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0\in\mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

Si $u_0\in I$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$. Plus généralement, si un terme de la suite (u_n) est dans I, alors tous les termes suivants sont égalements dans I.

Exemple 18. On reprend l'exemple précédent.

- Montrer que $[0,1]$ est stable par f.

- Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n\in[0,1]$.

Rappelons dans le tableau ci-dessous comment déterminer l'image d'un intervalle I par une fonction f dans le cadre idéal où f est **continue** et **strictement monotone** sur I.

Intervalle I	Intervalle $f(I)$	
	Cas f strictement croissante sur I	Cas f strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x),\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x),\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

4.2 La fonction f est croissante

Proposition 20 (Hors programme)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ stable par f. Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La suite (u_n) est monotone et son sens de variations est déterminé par la dichotomie suivante.

Si $u_1 \geqslant u_0$: *alors (u_n) est croissante.*

Si $u_1 \leqslant u_0$: *alors (u_n) est décroissante.*

Exemple 19. On reprend l'exemple précédent.

- Montrer que (u_n) est décroissante.

4.3 La fonction f vérifie la propriété : $\forall x \in I, f(x) \geqslant x$

Proposition 21 (Hors programme)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ stable par f. Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$, *alors (u_n) est croissante.*

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant x$, *alors (u_n) est décroissante.*

Remarque 17 (Interprétation géométrique). Dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$, c'est dire que la courbe représentative de la fonction f est au dessus de la droite d'équation $y = x$.

Remarque 18. Contrairement à la proposition précédente, ici nous n'avons pas besoin de recourir à un raisonnement par récurrence. Il suffit de remplacer x par u_n.

Exemple 20. On reprend l'exemple précédent.

- Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant x$.

- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4.4 Continuité de f et point fixe

Théoreme 22 (Théorème de composition des limites)**.** *Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet en ℓ une limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors la suite $(f(u_n))$ __**converge vers** a__. Autrement dit,*

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ f(x) \underset{x\to\ell}{\longrightarrow} a \end{cases}, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to\ell} f(x) = a$$

Definition 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un *point fixe* de f si __$f(x) = x$__.

Proposition 23. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et f est continue en ℓ, alors __$\ell = f(\ell)$__. *Autrement dit, la limite de la suite (u_n) (si elle existe) est un point fixe de f.*

Exemple 21. On reprend l'exemple précédent.

- Déterminer les points fixes de f.

- En déduire la limite de la suite (u_n).

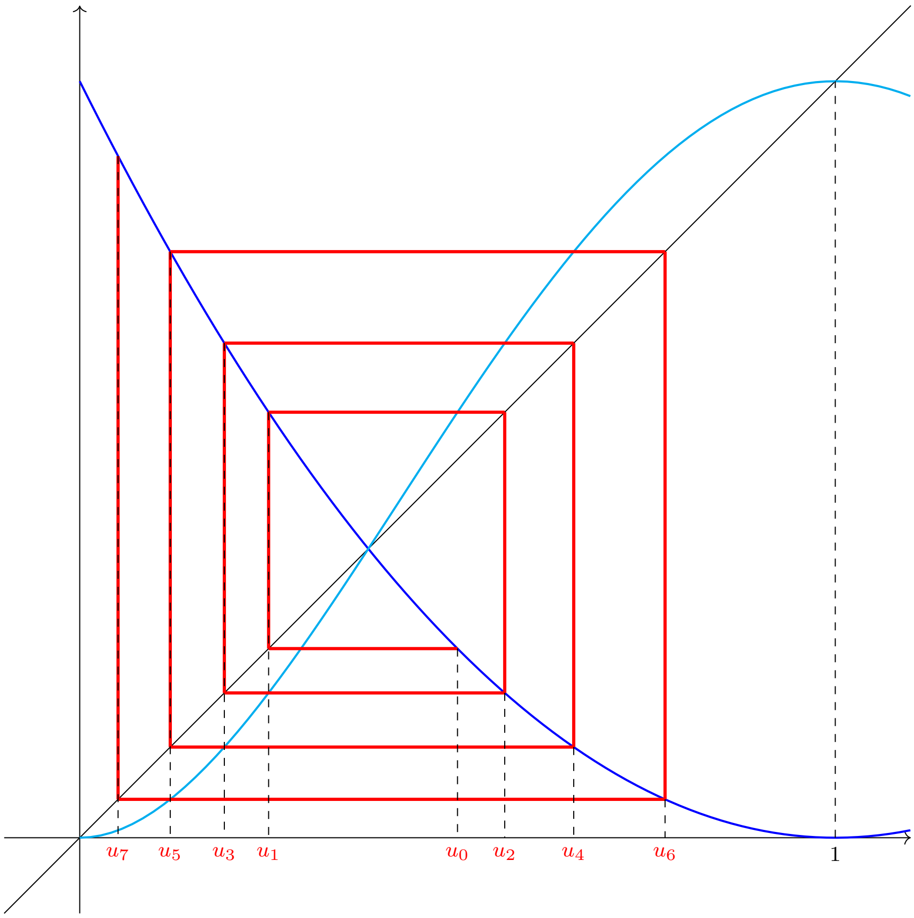
4.5 La fonction f est décroissante

Ce cas est plus compliqué et à la limite du programme. On privilégie alors l'étude d'un exemple plutôt que de donner un exposé théorique. L'idée centrale est que la fonction $f \circ f$ est alors croissante et qu'on peut donc utiliser les résultats précédents avec les sous-suites des termes pairs et impairs.

Exercice 14 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1-u_n)^2 \end{cases}$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (1-x)^2$.

1. (a) Etudier les variations de la fonction f.
   (b) Vérifier que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
   (c) Déterminer les points fixes de la fonction f.
   (d) Préciser le sens de variations de la fonction $g = f \circ f$ sur $[0,1]$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
3. (a) Démontrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs dans $[0,1]$.
   (b) Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
   Préciser leur monotonie.
   (c) Justifier que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On note respectivement ℓ_1 et ℓ_2 les limites des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
   (e) Déterminer ℓ_1 et ℓ_2.



4.6 Résumé du plan d'étude

On dispose maintenant de la chaîne complète d'étude afin de réaliser l'étude d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On démontre d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$ (où I est un intervalle stable).
2. On démontre ensuite que la suite (u_n) est croissante (ou décroissante).
3. Si I est un intervalle borné (*i.e.* si I a des extrémités finies), on en déduit que la suite (u_n) est convergente (par théorème de convergence monotone) de limite finie ℓ. On obtient de plus que $\ell \in \bar{I}$, adhérence de l'intervalle I (intervalle auquel on a ajouté ses bornes finies). Par exemple, si $I =]0,2[$, on obtient que : $\ell \in [0,2]$.
4. Enfin, on démontre que ℓ est un point fixe de f. Ainsi, s'il n'y a qu'un point fixe de f dans $\bar{I}$ (c'est le cas le plus simple), c'est forcément la valeur de ℓ cherchée.

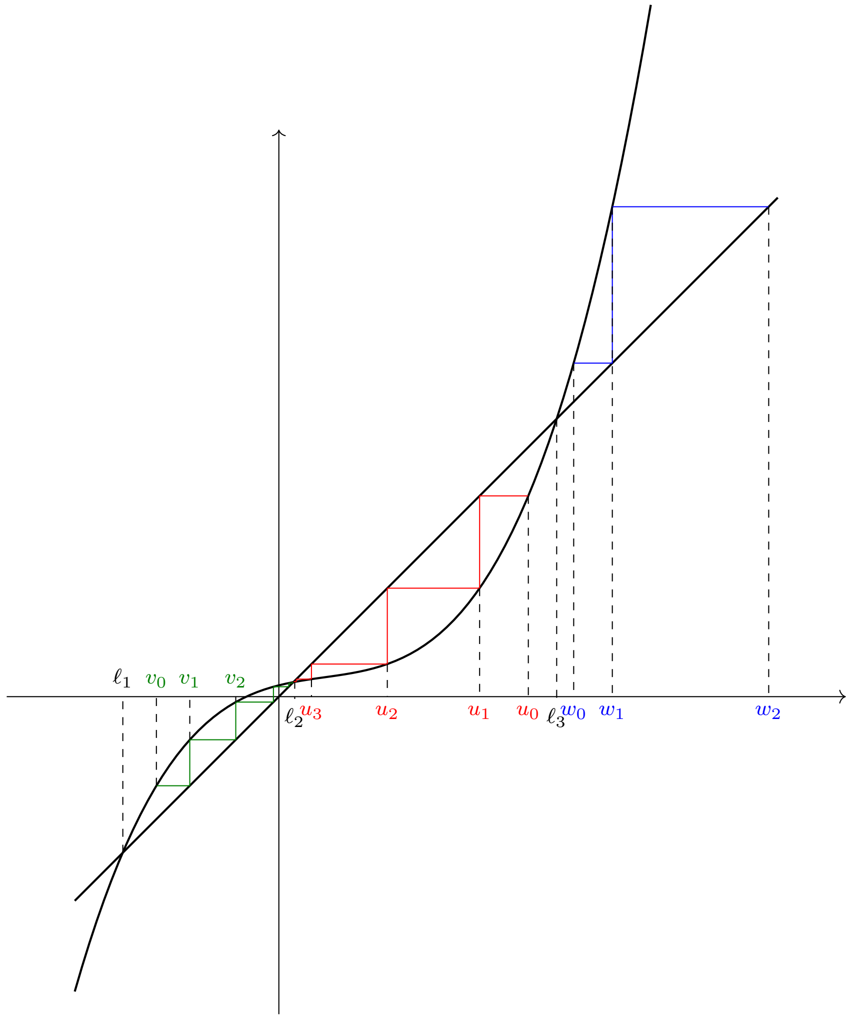
L'exercice suivant illustre un cas classique. On cherche à démontrer qu'un des points listés au-dessus n'est pas vérifié. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il l'est. Cette hypothèse permet de conclure que les points suivants sont aussi vérifiés (on déroule le raisonnement). On peut ainsi aboutir à une contradiction.

Exercice 15 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1 \end{cases}$ et on note $f : x \mapsto e^x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0. Déterminer le signe de $f(x) - x$. Préciser le sens de variation de f.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée et en déduire sa limite.

Remarque 19. Il faut toujours penser à raisonner par l'absurde quand on demande de démontrer qu'une propriété n'est pas vérifiée.

Représentation graphique



Remarque 20. Les propriétés évoquées précédemment se lisent sur ce graphique.

- Les points fixes de f se situent à l'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$. La limite (éventuelle) de (u_n) est l'un de ces points fixes. Il y en a ici 3 que nous notons (dans l'ordre croissant) ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3.
- Les intervalles $]-\infty, \ell_1]$, $[\ell_1, \ell_2]$, $[\ell_2, \ell_3]$, $[\ell_3, +\infty[$ sont des intervalles de stabilité par f. Ainsi, si u_0 est dans l'un de ces intervalles, tous les éléments de la suite (u_n) seront dans cet intervalle.
- Si l'on choisit $v_0 \in I =]\ell_1, \ell_2[$, la suite (v_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} v_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n) \end{array}\right.$ est croissante.
  En effet : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x$ (la courbe représentative de f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$). La suite (v_n) est convergente (car majorée) de limite ℓ_2.
- Si l'on choisit $u_0 \in J =]\ell_2, \ell_3[$, la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$ est décroissante.
  En effet : $\forall x \in J,\ f(x) \leqslant x$ (la courbe représentative de f est située en-dessous de la droite d'équation $y = x$). La suite (u_n) est convergente (car minorée) de limite ℓ_2.
- Si l'on choisit $w_0 \in K =]\ell_3, +\infty[$, la suite (w_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} w_0 \in K \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = f(w_n) \end{array}\right.$ est croissante.
  En effet : $\forall x \in K,\ f(x) \geqslant x$ (la courbe représentative de f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$). Démontrons par l'absurde que la suite (w_n) est non majorée. Supposons qu'elle soit majorée. Elle est alors convergente et sa limite ℓ est un point fixe de f. Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geqslant w_0$ (par croissance de (w_n)). D'où, par passage à la limite : $\ell \geqslant w_0 > \ell_3$. C'est impossible : ℓ ne peut être strictement plus grand que le plus grand point fixe de f. Ainsi la suite (w_n) n'est pas majorée et donc elle diverge vers $+\infty$.

4.7 Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

Théoreme 24 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle. Si f est dérivable sur I et si il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\left|f'(t)\right| \leqslant M$, alors pour tout $(x, y) \in I^2$,*

Exercice 16 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$ et on note $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

1. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer que : $\forall x \in [0, 2], \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Déterminer les points fixes de f. Notons α l'unique point fixe dans $[0, 2]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\ |u_n - \alpha|$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
6. Enfin, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
7. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
8. Déterminer un entier N tel que $|u_N - \alpha| \leqslant 10^{-5}$.
9. Compléter le script **Python** suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

```python
import numpy as np
N = np.ceil(5 * np.log(10) / np.log(2) + 1)
u = 0
for k in range(N) :
    u = np.sqrt(u+1)
print(u)
```

Méthode. On considère un intervalle I stable par f. D'autre part, on note $\alpha \in I$ un point fixe de la fonction f. L'utilisation de l'IAF permet d'obtenir plusieurs propriétés sur (u_n). Les exercices d'étude de suites récurrentes à l'aide de l'IAF suivent la trame suivante.

1. On démontre tout d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.
2. On démontre que la dérivée de f est bornée : $\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$.
3. En appliquant l'IAF à $x = u_n \in I$ et $y = \alpha \in I$, on obtient :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\ |u_n - \alpha|}$$
4. On en déduit par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant M^n\ |u_0 - \alpha|$
5. Si on sait de plus que $0 \leqslant M < 1$, alors $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient que : $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
6. Il est aussi souvent demandé d'écrire un programme **Python** permettant de trouver une valeur approchée à 10^{-4} près de α.

5 Suites implicites

Une suite (u_n) est dite *implicite* lorsque son terme général est donné comme solution d'une équation dont on ne peut déterminer explicitement la solution. Dans les énoncés, l'introduction d'une suite implicite se fait généralement de l'une des deux manières suivantes.

1. « Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle I. »
(où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction indépendante de n).
Par définition, on a alors : $\underline{\ f(u_n) = n\ }$.
2. « Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle I. »
(où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui dépend de n).
Par définition, on a alors : $\underline{\ f_n(u_n) = 0\ }$.

Exercice 17 : On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f par : $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 18 : On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Faire l'étude de la fonction f_n.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Exercice 19 :*(d'après* `EML 2020`*)* On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$ définie sur $]0,1[$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in \,]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\big(\ln(x)\big)^2}\big(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\big)$$

2. (a) Justifier : $\forall t \in \,]0,1[,\ t\,\ln(t) < 0$
   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.
3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

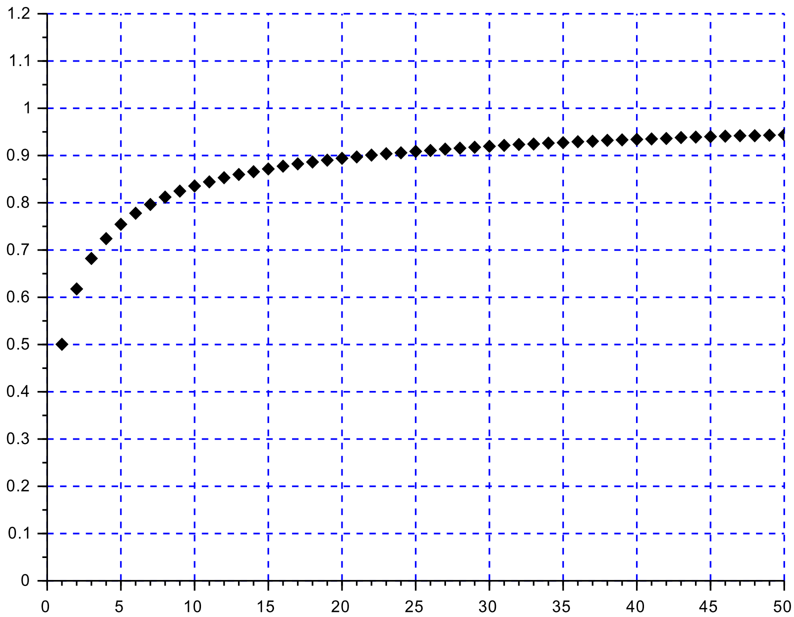
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2.

9. (a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def Dichotomie(n) :
    a,b = 0,1
    while  b-a > 10**(-3)  :
        c = (a + b) / 2
        if (c * n + c - 1) > 0 :
            b = c
        else :
            a = c
    return  c
```

(b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

6 Comparaison des suites réelles

6.1 Négligeabilité

Definition 17. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) (ou *dominée* par la suite (v_n)) si

Si c'est le cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, ce qui se lit « u_n est un petit o de v_n » *(*o $= 15^{ème}$ *lettre de l'alphabet).*
On écrit aussi $u_n << v_n$ (pas dans les copies !).

Méthode. Comment montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$?
On revient à la définition, on calcule le quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ et on montre que $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Definition 18. Une suite (u_n) est dite

- **logarithmique** si son terme général est de la forme $u_n = (\ln(n))^b$ (où $b > 0$).
- **polynomiale** si son terme général est de la forme $u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_p n^p$ (où $p \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$).
- **géométrique** ou **exponentielle** si son terme général est de la forme $u_n = q^n$ (où $q > 1$).

Théoreme 25 (Croissances comparées)**.** *Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a :*

i.e. $(\ln(n))^b \underset{n\to+\infty}{=} o(n^a)$, $n^a \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$, $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$, $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$.

La croissance logarithmique est beaucoup plus faible que la croissance polynomiale, qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance exponentielle, qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance factorielle.

Remarque 21. Le théorème des croissances comparées permet de lever des F.I. lors de calculs de limites.

Exercice 20 : Soient $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$. Déterminer la limite des suites suivantes (dont on donne le terme général) :

1. $\dfrac{2^n}{n^n}$
2. $\dfrac{(\ln(n))^{1000}}{n^2}$
3. $\dfrac{(\ln(n))^4}{3^n}$
4. $\dfrac{n^5}{3^n}$
5. $\dfrac{n^2}{n!}$
6. $\dfrac{\sqrt{n}}{n^n}$
7. $\dfrac{n^3}{\ln(n)}$
8. $\dfrac{n!}{e^n}$
9. $\dfrac{n^a}{(\ln(n))^b}$
10. $\dfrac{q^n}{n^a}$
11. $\dfrac{e^{n^2}}{n}$
12. $\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n!}$
13. $\dfrac{3n}{3^n}$
14. $\dfrac{5^n}{n^5}$
15. $\dfrac{2^n}{\ln(n)^3}$
16. $\dfrac{e^n}{n^{10}\ln(n)^2}$
17. $\dfrac{n^3 e^n}{n!}$
18. $\dfrac{n^n}{(\ln(n))^4 2^n}$

Théoreme 26 (Comportement asymptotique des suites géométriques)**.** *Soit $q \neq 0$.*

- *Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.*
- *Si $q > 1$, alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- *Si $|q| < 1$, alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- *Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n)* ***n'admet pas de limite***.

6.2 Equivalence

6.2.1 Définition

Definition 19. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que la suite (u_n) est *équivalente* à la suite (v_n) si

Si c'est le cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Méthode. Comment montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$?

On revient à la définition, on calcule le quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ et on montre que $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Méthode. Comment déterminer un équivalent d'une somme ?

Considérons une suite (u_n) dont le terme général est donné sous la forme d'une somme : $u_n = v_n + w_n$.
Supposons que w_n soit le **terme dominant**, c'est-à-dire que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$. Alors

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{v_n + w_n}{w_n} = \frac{v_n}{w_n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

En pratique :

- Si les deux termes de la somme tendent vers $\pm\infty$, le terme dominant est celui qui tend **le plus vite** vers l'infini.
- Si les deux termes de la somme tendent vers 0, le terme dominant est celui qui tend **le moins vite** vers 0.

On pensera alors à utiliser des croissances comparées en cas de F.I.

Exercice 21 : Déterminer des équivalents simples des suites suivantes (dont on donne le terme général) :

1. $n^4 + 3n^2$
2. $-n^5 + 2n^4 - n + 10$
3. $\ln(n) + 5n$
4. $\ln(n) + \dfrac{1}{n}$
5. $\ln(n) + (\ln(n))^2$
6. $2e^n - 6(\ln(n))^5$
7. $n^3 - 3^n$
8. $1 + n + e^n$
9. $n! + \ln(n) - n^4$
10. $1 - \dfrac{1}{n^2}$
11. $e^n + e^{-n}$
12. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$
13. $\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{\ln(n)}$
14. $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{n^n}$
15. $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n^7}$
16. $\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{3^n}$
17. $\dfrac{1}{n!} + e^{2n} - (2n+1)^8$
18. $1 + \ln(n) + n + e^n + n! + n^n$

6.2.2 Opérations sur les équivalents et propriétés élémentaires

Théoreme 27. *Soient (u_n), (v_n), (w_n), (z_n) des suites réelles (lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang). La relation d'équivalence $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.*

- *Réflexivité :*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

- *Symétrie :*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

- *Transitivité :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n}$$

- *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times z_n}$$

- *Compatibilité avec le quotient :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{z_n}}$$

- *Equivalent et limites :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ (\in \overline{\mathbb{R}}) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

- *Elevation à une puissance fixe : soit $a \in \mathbb{R}$* ***une constante***

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a}$$

Remarque 22. Attention, il existe plusieurs pièges avec les équivalents.

1. Ecrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ **n'a aucun sens**.

Si on est amené à écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$, c'est forcément que l'on a fait une erreur de calcul. Il ne faut jamais écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ sur une copie !

2. La propriété « Equivalent et limites » listée ci-dessus implique la propriété suivante :

   Proposition 28. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui admettent une limite (éventuellement infinie). Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

   - La réciproque est **fausse** en général, c'est-à-dire que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on ne peut pas en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
     - Exemple 1 : si $u_n = n$ et $v_n = n^2$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ mais on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
     - Exemple 2 : si $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/n^2$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ mais on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
   - La réciproque est **vraie** si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}^*$. Dans ce cas, on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ (puisque $u_n/v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell/\ell = 1$). En particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Les suites convergeant vers un réel non nul ont un comportement asymptotique simple. Les suites ayant pour limite 0 ou $\pm\infty$ ont un comportement asymptotique complexe et varié, c'est d'elles dont il faut se méfier.

3. Le théorème précédent stipule que l'opérateur $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est compatible avec les opérations de produit et quotient. Nous allons maintenant voir que $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ n'est pas compatible avec l'opération de somme. On pose $u_n = n + \sqrt{n}$, $v_n = n + \ln(n)$, $w_n = -n$, $z_n = -n$. On a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$, pourtant $u_n + w_n = \sqrt{n}$ et $v_n + z_n = \ln(n)$ donc $(u_n + w_n)$ et $(v_n + z_n)$ ne sont pas équivalentes.

   On ne peut pas sommer des équivalents ! Il est interdit de sommer des équivalents !

4. On pose $u_n = n + 1$ et $v_n = n$. On a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Par contre,
$$\frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{v_n}} = \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{n}} = \mathrm{e} \neq 1$$
   donc (e^{u_n}) et (e^{v_n}) ne sont pas équivalentes.

   On ne peut pas appliquer de fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence ! La seule exception est l'élévation à une puissance fixe.

Exercice 22 : Déterminer la limite des suites suivantes (dont on donne le terme général) :

1. $\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$
2. $\sqrt{n^2+2} - n$
3. $\dfrac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}$
4. $\dfrac{n^2\, e^n + n\, e^{2n}}{n^3\,(\ln(n)) + n\,(\ln(n))^3}$

6.2.3 Equivalents usuels tirés des taux d'accroissement

En reconnaissant des taux d'accroissements de fonctions dérivables, on obtient les limites suivantes :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1}$$

D'où, par le théorème de composition des limites :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad \text{et} \quad e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

Exemple 22.

- $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
- $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
- $\ln\left(1+e^{-n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$
- $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

Exercice 23 : Déterminer la limite des suites suivantes (dont on donne le terme général) :

1. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
2. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
3. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^5}$
4. $(2n-3)^2 \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

7 Exercices supplémentaires

7.1 Suites usuelles

Exercice 24 : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \end{cases}$.
On introduit la suite auxiliaire (t_n) de terme général :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

1. Montrer que (t_n) est une suite géométrique.
2. En déduire une expression de t_n puis de u_n.

Exercice 25 : On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.
2. Déterminer la suite (z_n) de terme général $z_n = u_n - v_n$. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 26 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Justifier que (v_n) est bien définie.
3. De quel type est la suite (v_n) ?
4. En déduire la formule explicite de u_n.

Exercice 27 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Déterminer une expression explicite de u_n. Comme dans l'exercice précédent, on introduira une suite auxiliaire (v_n) bien choisie.

7.2 Définition de la convergence

Exercice 28 : *Vrai ou Faux ?*

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.
2. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
3. Si $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge.
4. Si $(|u_n|)$ tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.
5. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
6. Une suite convergente et majorée est croissante.
7. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
8. Une suite strictement croissante diverge vers $+\infty$.
9. Une suite strictement décroissante diverge vers $-\infty$.

10. Si (u_n) est croissante et $u_n \leqslant v_n$ alors (v_n) est croissante.
11. Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ $(F.I.)$.
12. Si (u_n) est divergente, alors la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$ est divergente.
13. Si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Exercice 29 :*(propriété de recouvrement)*
Soit (u_n) une suite telle que :
- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$,
- $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que (u_n) converge vers ℓ en revenant à la définition.

7.3 Comparaison de suites, calculs de limites

Exercice 30 : Comparer les suites suivantes à l'aide du symbole mathématique approprié ($\underset{n\to+\infty}{\sim}$ ou $\underset{n\to+\infty}{o}$), si c'est possible.

1. $u_n = 3n$ et $v_n = 3^n$
2. $u_n = 2^{-n}$ et $v_n = 2^n$
3. $u_n = n^5$ et $v_n = 5^n$
4. $u_n = n + 5$ et $v_n = n - 1000$
5. $u_n = n^3 + n$ et $v_n = (n+1)^3$
6. $u_n = \frac{1}{2^n}$ et $v_n = 3^n$
7. $u_n = 3n^3 - 2016n^2$ et $v_n = 3n^3 + 10000$
8. $u_n = 2^n + 100n^3 - 100$ et $v_n = 5^n - 5n + 10$
9. $u_n = n^{10} - n^5 + n$ et $v_n = 5n^{10} + 10n - 20$
10. $u_n = \mathrm{e}^n$ et $v_n = n^n$
11. $u_n = 2^n + n^2 - 10n$ et $v_n = 3^n + n^2$
12. $u_n = \dfrac{n^7 - 10n^5 + 3n - 46}{n^8 - 20n^7 + 3n^4 - n}$ et $v_n = n^4$
13. $u_n = \ln(n^2+1)$ et $v_n = n^2 + n - 3$

Exercice 31 : Donner l'équivalent en $+\infty$ le plus simple possible des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 + 3n - 3$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{n}$
3. $u_n = n^2 + \dfrac{n}{n+200}$
4. $u_n = \exp\left(n^2 + n + 1\right)$
5. $u_n = 3n^{10} - 100n^7 + 38n^5 - 10000n + 2^{10}$
6. $u_n = 5n^3 - 100n + 400$
7. $u_n = \dfrac{5}{n^5} + \dfrac{15}{n^{15}} - \dfrac{2}{n^2}$
8. $u_n = \dfrac{3}{n^3} - \dfrac{n^5}{3} - 100n + \dfrac{40}{n^4}$

Exercice 32 : Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\ln n \leqslant u_n \leqslant \ln(2n)$$

Trouver un équivalent de u_n.

Exercice 33 : Chercher un équivalent de $u_n + v_n$ en $+\infty$:

1. $u_n = n^5 + n^2 - 1$ et $v_n = -n^5 + n^3 - 5$.
2. $u_n = n^5 + n^2 - 1$ et $v_n = -n^4 + n^3$.
3. $u_n = n^5 + \mathrm{e}^n - \ln n$ et $v_n = -n^5 + 1 - \ln n$.
4. $u_n = 1 + \ln(n) - n!$ et $v_n = n^n - \ln(n)$

Exercice 34 : Donner un équivalent des suites suivantes en $+\infty$:

$$u_n = \frac{5+2n^2}{n-100} \ ; \quad v_n = u_n - \frac{34}{n^3} \ ; \quad w_n = 3u_n \ ; \quad t_n = \frac{u_n}{n^2-4n} \ ; \quad s_n = \sqrt{u_n}.$$

Exercice 35 : Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

1. Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.
2. Trouver un équivalent de $v_n = 1 - u_n$ puis donner sa limite.
3. Donner un équivalent de $\ln(1-u_n)$.

Exercice 36 : Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (5n+4)\ln\left(\frac{n+10}{n+3}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(2^{\frac{1}{n}}+5^{\frac{1}{n}}\right)^n$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+n^2\right)^{\frac{1}{n}}$
7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(e^n+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n^2}}$
8. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+e^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}}{n\ \ln n - \sqrt{n}}$
9. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

Exercice 37 : Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-3n^7+5n-n^3}{n^2+1}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\ n^2+3n}{n^2+\sqrt{n}}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}+2}{e^{\ln n+3}-5}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2e^n-ne^{2n}}{n^3\ln n-n\left(\ln n\right)^3}$
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2+3n+1}{\ln n+5}$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-5n\sqrt{n}+n-\ln n+n^{-1}}{e^{3n}-e^n+1-e^{-n}}$
7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}$
8. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3^n\ e^{-3n}$
9. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$

7.4 Théorème de convergence monotone / d'encadrement

Exercice 38 :*(d'après* `EDHEC 2001`*)* On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et à termes strictement positifs.
2. En déduire que la suite (u_n) est monotone.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2 - {u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.
4. En déduire que, pour tout $n > 0$, on a :
$$ {u_n}^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{u_k}^2}$$
5. En déduire que, pour tout $n \neq 0$, ${u_n}^2 \geqslant 2n+1$.
6. En déduire la limite de (u_n).
7. Ecrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier n et qui affiche la valeur de u_n.
8. Ecrire un script **Python** qui affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 100$.

Exercice 39 : On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n).
3. On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (T_n) converge.
4. Donner un équivalent simple de la suite (S_n).

Exercice 40 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$. Déterminer sa limite.

7.5 Suites adjacentes

Exercice 41 : Soient (u_n) et (v_n) définies par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} u_0 & = & 3 & \text{et} & v_0 & = & 11 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + v_n}{4} & \text{et} & v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{array} \right.$$

1. Étudier la suite $(v_n - u_n)$. Calculer son terme général en fonction de n. Quel est son signe ? Donner sa limite.
2. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?
3. Étudier la suite $(u_n + v_n)$. Que conclure ?

Exercice 42 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

7.6 Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 43 : Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 44 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est monotone.
4. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 45 :*(d'après* `EML 2016`*)*
On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)
7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice 46 :*(d'après* `ESC 2009`*)*

1. (a) Étudier les variations de la fonction $h : x \mapsto x^4 - 4x + 1$. On précisera les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En déduire que l'équation $x^4 - 4x + 1 = 0$ admet exactement deux solutions réelles α et β, avec $\alpha \leq \beta$.
   (c) Montrer : $\alpha \in [0, 1[$ et que $\beta > 1$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n,\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^4 + 1}{4} \end{cases}$
   (a) Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto \frac{x^4+1}{4}$.
   (b) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
   (d) Écrire une fonction en **Python** qui prend en paramètre un entier n et qui affiche la valeur de u_n.

Exercice 47 :*(d'après* `EML 1995`*)*
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(1+x) \end{array} \right.$. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, et calculer, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Étudier les variations de f', puis celles de f.
   (c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.
3. On suppose dans cette question : $u_0 \in]\mathrm{e} - 1, +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{e} - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.
   (b) En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, \mathrm{e} - 1[$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 48 :*(d'après* `EML 2007`*)* On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.

I. On considère l'application :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \ln x \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

II. On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x \end{array} \right.$$

4. (a) Montrer que f est strictement croissante sur I.
   (b) Montrer que $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

   (a) Calculer u_1.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer un équivalent de u_n.

7.7 IAF pour l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 49 : On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$, que l'on notera α.
2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
3. (a) Montrer : $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$.
   (c) Puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.
   (d) En déduire enfin que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. Écrire un programme **Python** donnant une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice 50 : Soit $f : x \mapsto x^2 + \frac{3}{16}$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Calculer u_1.
2. Déterminer les limites possibles de la suite.
3. Démontrer que $f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \frac{7}{16}\right]$.
4. En déduire que pour tout $n \geqslant 1,\ u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leqslant \frac{7}{8} \left|u_n - \frac{1}{4}\right|$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \frac{7}{16}$.
7. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 51 :*(d'après* `EML 2001`*)* On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ sur $]0, +\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[\,, f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x - 1)^3}\ (xe^x - 2e^x + x + 2)$.
3. Étudier les variations de la fonction $g : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par : $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$.
   En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[\,, f''(x) > 0$.
4. En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$).

   On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.
5. On considère la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[\,, \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
6. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.
7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \dfrac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$.
8. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln(2)|$.
9. Établir que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge et déterminer sa limite.

7.8 Suites implicites

Exercice 52 : Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n : x \mapsto \ln(x+n) - \dfrac{n}{x}$.
Pour tout entier naturel n, on définit l'équation (E_n) par :

$$\ln(x+n) = \frac{n}{x}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation (E_n) admet une unique solution dans $]0,+\infty[$, notée u_n.
2. Déterminer u_0.
3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, puis montrer :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$$
5. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 53 :*(d'après* `EDHEC 2008`*)* Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On note $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   (b) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de $(\mathscr{C}_n)$.
   (c) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ en A_1 puis tracer la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 54 : On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0,1[$.
2. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire : $\forall n > 0,\ x_n < x_{n+1}$.
3. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.
4. Démontrer : $\forall n > 0,\ x_n \leqslant \ell$.
5. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 55 :*(d'après* `EML 1994`*)*

1. On considère la fonction f définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 2\sqrt{x}\,e^{-x}$.
   (a) Etudier les variations de la fonction f.
   (b) Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on notera g.
   (c) Dresser le tableau de variations de g.
   (d) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? En $\sqrt{\dfrac{2}{e}}$?
2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ (d'inconnue x) admet une unique solution dans le segment $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. On notera a_n cette solution.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.