Objectif du DM

On rappelle qu'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est *rationnel* si il existe deux entiers relatifs p et q, avec $q \neq 0$, tels que $a = \frac{p}{q}$.
L'objectif de ce DM est de montrer que le nombre e n'est pas rationnel (autrement dit : $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$).

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
2. (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$.
   (c) En déduire qu'il existe deux suites d'entiers (a_n) et (b_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n \mathrm{e} + b_n$.
3. (a) Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (c) Conclure que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
4. On suppose dans cette question que e est rationnel. Ainsi, il existe $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ (car $\mathrm{e} > 0$).
   (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a_n p + b_n q}{q}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n p + b_n q$ est un entier.
   (c) En utilisant les questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n p + b_n q > 0$ et donc $a_n p + b_n q \geqslant 1$.
   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{q}$.
   (e) Conclure.