Une partie des nombres réels sont des nombres *décimaux* (par exemple $x = 2,153$). Cette écriture utilisant une virgule cache en réalité une somme. En effet,

$$2,153 = 2 + 1 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} + 3 \times \frac{1}{1000} = 2 + \sum_{n=1}^{3} c_n 10^{-n}$$

où $c_1 = 1$, $c_2 = 5$ et $c_3 = 3$ sont les trois décimales de $2,153$.
Maintenant que nous savons donner un sens aux sommes infinies, nous pouvons généraliser la notation décimale à un nombre infini de décimales. Par exemple, on notera $1,0101010101\dots$ le nombre

$$1 + 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{100} + 0 \times \frac{1}{1000} + 1 \times \frac{1}{10000} + \dots = 1 + 0 \times \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-(2n+1)} + 1 \times \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 10^{-n}$$

où $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (0,1,0,1,0,1,\dots)$ est la suite (infinie) des décimales de $1,0101010101\cdots$. Bien entendu, cette notation n'a de sens qu'en cas de convergence de la série $\sum c_n 10^{-n}$.

L'objectif de ce DM est de démontrer le théorème suivant, qui stipule que tout réel x admet une unique représentation décimale *propre* (*i.e.* qui ne se termine pas par une infinité de 9 consécutifs).

Théoreme. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \in [\![0,9]\!]$.*
- *La série $\sum c_n 10^{-n}$ converge.*
- *$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 10^{-n}$.*
- *La suite (c_n) ne se termine pas par une infinité de 9 consécutifs.*

Remarque. *La représentation décimale de x est finie si la suite (c_n) se termine par une infinité de 0 consécutifs. Cette propriété de la suite (c_n) caractérise les nombres décimaux.*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x < b_n$.
   (b) (*) Montrer que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
   (c) En déduire que (a_n) et (b_n) convergent vers x.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \in [\![0,9]\!]$.
   (b) En déduire que la série $\sum c_n 10^{-n}$ converge.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}$.
   (b) En déduire que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 10^{-n}$.
4. On suppose dans cette question que la suite (c_n) se termine par une infinité de 9 consécutifs. Autrement dit, on suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $c_n = 9$. On fixe un tel entier n_0 dans la suite.
   (a) Montrer que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-2} c_n 10^{-n} + (c_{n_0-1} + 1) 10^{-(n_0-1)}$.
   (b) En utilisant la relation précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq n_0 - 1$, $10^n x$ est un entier.
   (c) En déduire une contradiction.
5. (*) On considère dans cette question deux suites (c_n) et (c'_n) qui vérifient les propriétés du théorème et on suppose que ces deux suites ne sont pas égales.
   (a) On note m le plus petit des indices n tels que $c_n \neq c'_n$ (*i.e.* $m = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid c_n \neq c'_n\}$). Montrer que
   $$c_m + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{m+n} 10^{-n} = c'_m + \sum_{n=1}^{+\infty} c'_{m+n} 10^{-n}$$
   (b) Montrer que $0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} c_{m+n} 10^{-n} < 1$.
   (c) En déduire que $c_m = c'_m$ (on pourra chercher à encadrer $c_m - c'_m$) puis conclure.
6. Que vaut le nombre $0,999999\dots$? Qu'en déduire ?