Une partie des nombres réels sont des nombres *décimaux* (par exemple $x = 2,153$). Cette écriture utilisant une virgule cache en réalité une somme. En effet,

$$2,153 = 2 + 1 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100} + 3 \times \frac{1}{1000} = 2 + \sum_{n=1}^{3} c_n 10^{-n}$$

où $c_1 = 1$, $c_2 = 5$ et $c_3 = 3$ sont les trois décimales de $2,153$.
Maintenant que nous savons donner un sens aux sommes infinies, nous pouvons généraliser la notation décimale à un nombre infini de décimales. Par exemple, on notera $1,0101010101\ldots$ le nombre

$$1 + 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{100} + 0 \times \frac{1}{1000} + 1 \times \frac{1}{10000} + \cdots = 1 + 0 \times \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-(2n+1)} + 1 \times \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 10^{-n}$$

où $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (0,1,0,1,0,1,\ldots)$ est la suite (infinie) des décimales de $1,0101010101\cdots$. Bien entendu, cette notation n'a de sens qu'en cas de convergence de la série $\sum c_n 10^{-n}$.

L'objectif de ce DM est de démontrer le théorème suivant, qui stipule que tout réel x admet une unique représentation décimale *propre* (*i.e.* qui ne se termine pas par une infinité de 9 consécutifs).

Théoreme. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \in [\![0,9]\!]$.*
- *La série $\sum c_n 10^{-n}$ converge.*
- *$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 10^{-n}$.*
- *La suite (c_n) ne se termine pas par une infinité de 9 consécutifs.*

Remarque. *La représentation décimale de x est finie si la suite (c_n) se termine par une infinité de 0 consécutifs. Cette propriété de la suite (c_n) caractérise les nombres décimaux.*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x < b_n$.
   (b) (*) Montrer que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
   (c) En déduire que (a_n) et (b_n) convergent vers x.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \in [\![0,9]\!]$.
   (b) En déduire que la série $\sum c_n 10^{-n}$ converge.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}$.
   (b) En déduire que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 10^{-n}$.
4. On suppose dans cette question que la suite (c_n) se termine par une infinité de 9 consécutifs. Autrement dit, on suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $c_n = 9$. On fixe un tel entier n_0 dans la suite.
   (a) Montrer que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-2} c_n 10^{-n} + (c_{n_0-1} + 1)10^{-(n_0-1)}$.
   (b) En utilisant la relation précédente, montrer que, pour tout entier $n \geq n_0 - 1$, $10^n x$ est un entier.
   (c) En déduire une contradiction.
5. (*) On considère dans cette question deux suites (c_n) et (c'_n) qui vérifient les propriétés du théorème et on suppose que ces deux suites ne sont pas égales.
   (a) On note m le plus petit des indices n tels que $c_n \neq c'_n$ (*i.e.* $m = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid c_n \neq c'_n\}$). Montrer que
   $$c_m + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{m+n} 10^{-n} = c'_m + \sum_{n=1}^{+\infty} c'_{m+n} 10^{-n}$$
   (b) Montrer que $0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} c_{m+n} 10^{-n} < 1$.
   (c) En déduire que $c_m = c'_m$ (on pourra chercher à encadrer $c_m - c'_m$) puis conclure.
6. Que vaut le nombre $0,999999\ldots$? Qu'en déduire ?

Correction.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \\ \text{donc} & \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \quad 10^n > 0 \\ \text{donc} & \boxed{a_n \leqslant x < b_n} \end{array}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} a_n \leqslant a_{n+1} &\iff \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor}{10^{n+1}} \\ &\iff 10\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \end{aligned}$$

Or

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$$

donc

$$10\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x$$

Or, $10\lfloor 10^n x \rfloor$ est un entier et donc, par définition de la partie entière : $10\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$.
On en déduit que $\boxed{(a_n) \text{ est croissante}}$.
De manière analogue,

$$\begin{aligned} b_{n+1} \leqslant b_n &\iff \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1}{10^{n+1}} \leqslant \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \\ &\iff \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leqslant 10\lfloor 10^n x \rfloor + 10 \end{aligned}$$

Or

$$10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

donc

$$10^{n+1} x < 10\lfloor 10^n x \rfloor + 10$$

Or, $10\lfloor 10^n x \rfloor + 10$ est un entier et donc, par définition de la partie entière :

$$\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 = \lceil 10^{n+1} x \rceil \leqslant 10\lfloor 10^n x \rfloor + 10$$

On en déduit que $\boxed{(b_n) \text{ est décroissante}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$b_n - a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = \frac{1}{10^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc elles convergent toutes les deux vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leqslant x < b_n$$

et donc, par passage à la limite (toutes les suites étant convergentes), on obtient

$$\ell \leqslant x \leqslant \ell$$

d'où $\boxed{\ell = x}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\lfloor 10^n x \rfloor$ et $\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ sont des entiers donc c_n est un entier. De plus, on a

$$\lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant 10^{n-1} x < \lfloor 10^{n-1} x \rfloor + 1$$

d'où

$$10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant 10^n x < 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor + 10$$

et donc

$$10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor + 10$$

d'où en particulier

$$10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor < 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor + 10$$

et finalement

$$0 \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor < 10$$

c'est-à-dire $0 \leqslant c_n < 10$, *i.e.* $\boxed{0 \leqslant c_n \leqslant 9}$.

(b) La série $\sum c_n 10^{-n}$ est à termes positifs. De plus,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant c_n \leqslant 9$ donc $0 \leqslant c_n 10^{-n} \leqslant 9 \times 10^{-n}$.
- la série $\sum 10^{-n}$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{10} \in]-1,1[$ donc elle converge. Ainsi, la série $\sum 9 \times 10^{-n}$ converge aussi.

On en déduit, par critère de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs que

$$\boxed{\text{la série } \sum c_n 10^{-n} \text{ converge}}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k} = 0$ et l'égalité est vraie.
Si $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(\lfloor 10^k x \rfloor - 10\lfloor 10^{k-1} x \rfloor\right) 10^{-k}\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} 10^{-k}\lfloor 10^k x \rfloor - 10^{-(k-1)}\lfloor 10^{k-1} x \rfloor \quad \textit{par télescopage}\\ &= 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor - 10^{-(1-1)}\lfloor 10^{(1-1)} x \rfloor\\ &= a_n - a_0\end{aligned}$$

d'où $\boxed{a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}}$.

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}$. De plus,
- $a_0 = \lfloor x \rfloor$.
- $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
- la série $\sum c_n 10^{-n}$ converge.

Par passage à la limite (toutes les suites étant convergentes), on obtient $\boxed{x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k 10^{-k}}$.

4. (a) D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}x &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 10^{-n}\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n 10^{-n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n 10^{-n}\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n 10^{-n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} 9 \times 10^{-n}\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n 10^{-n} + 9 \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n 10^{-n} + 9 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n+n_0}\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n 10^{-n} + 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n 10^{-n} + 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n_0} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \quad \text{(on reconnaît une série géométrique convergente de raison } q = \tfrac{1}{10} \in]-1,1[)\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n 10^{-n} + \left(\frac{1}{10}\right)^{n_0-1}\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-2} c_n 10^{-n} + c_{n_0-1}10^{-(n_0-1)} + \left(\frac{1}{10}\right)^{n_0-1}\\ &= \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{n_0-2} c_n 10^{-n} + (c_{n_0-1}+1)10^{-(n_0-1)}\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq n_0 - 1$. On a, d'après la question précédente,

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{n_0-2} c_k 10^{-k} + (c_{n_0-1}+1)10^{-(n_0-1)}$$

donc

$$10^n x = 10^n \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{n_0-2} c_k 10^{n-k} + (c_{n_0-1}+1)10^{n-(n_0-1)}$$

Comme $n \geq n_0 - 1$, on a, pour tout $k \in [\![1, n_0-2]\!]$, $10^{n-k} \in \mathbb{N}$ et $10^{n-(n_0-1)} \in \mathbb{N}$. On en déduit que $10^n x$ est une somme d'entiers et donc un entier.

(c) On a

$$\begin{aligned} c_{n_0} &= \lfloor 10^{n_0} x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n_0-1} x \rfloor \\ &= 10^{n_0} x - 10 \times 10^{n_0-1} x && \text{car } 10^{n_0} x \text{ et } 10^{n_0-1} x \text{ sont des entiers} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or, on avait supposé que, pour tout $n \geqslant n_0$, $c_n = 9$ et donc en particulier que $c_{n_0} = 9$.

$$\boxed{\text{On obtient que } 0 = 9. \text{ C'est une contradiction.}}$$

5. (a) Par définition des suites (c_n) et (c'_n),

$$\cancel{\lfloor x \rfloor} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 10^{-n} = \cancel{\lfloor x \rfloor} + \sum_{n=1}^{+\infty} c'_n 10^{-n}$$

donc $$\cancel{\sum_{n=1}^{m-1} c_n 10^{-n}} + \sum_{n=m}^{+\infty} c_n 10^{-n} = \cancel{\sum_{n=1}^{m-1} c'_n 10^{-n}} + \sum_{n=m}^{+\infty} c'_n 10^{-n}$$ (Par définition de m, pour tout $n \in [\![1, m-1]\!]$, $c_n = c'_n$)

donc $$\sum_{n=m}^{+\infty} c_n 10^{m-n} = \sum_{n=m}^{+\infty} c'_n 10^{m-n}$$ (en multipliant par 10^m)

donc $$\sum_{j=0}^{+\infty} c_{m+j} 10^{-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} c'_{m+j} 10^{-j}$$ (en posant $n = m + j$)

d'où $$c_m + \sum_{j=1}^{+\infty} c_{m+j} 10^{-j} = c'_m + \sum_{j=1}^{+\infty} c'_{m+j} 10^{-j}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$0 \leqslant c_{m+n} \leqslant 9$$

donc $$0 \leqslant c_{m+n} 10^{-n} \leqslant 9 \times 10^{-n}$$

En sommant ces inégalités pour n variant de 1 à $+\infty$ (toutes les séries en présence sont convergentes), on obtient

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} c_{m+n} 10^{-n} < \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n}$$

Détaillons l'inégalité de droite : si c'était une égalité, cela impliquerait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 9$. Ceci contredirait la question 4. Ainsi, l'inégalité de droite est bien stricte.
Or,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n} = 9 \times \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

d'où

$$\boxed{0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} c_{m+n} 10^{-n} < 1}$$

(c) On a

$$c_m - c'_m = \sum_{n=1}^{+\infty} c'_{m+n} 10^{-n} - \sum_{n=1}^{+\infty} c_{m+n} 10^{-n}$$

Or, d'après la question précédente

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} c'_{m+n} 10^{-n} < 1$$
$$-1 < -\sum_{n=1}^{+\infty} c_{m+n} 10^{-n} \leqslant 0$$

et en sommant on obtient

$$-1 < c_m - c'_m < 1$$

Or $c_m - c'_m$ est un entier donc on en déduit que $c_m - c'_m = 0$, *i.e.* $\boxed{c_m = c'_m}$. Ceci contredit la définition de m. Il n'existe donc pas de tel entier m et les deux suites (c_n) et (c'_n) sont égales.

6. Par définition,

$$\begin{aligned} 0,999999\ldots &= \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n} \\ &= 1 && \text{(cf le calcul fait à la question 5b)} \end{aligned}$$

Or, 1 possède une autre représentation décimale. En effet,

$$1 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 \times 10^{-n} = 1,0000000\ldots$$

Il n'y a donc pas d'unicité de la représentation décimale si l'on n'impose pas à la suite des décimales de ne pas se terminer par une infinité de 9 consécutifs.

Remarque

La polémique sur l'égalité $0,999999\cdots = 1$ refait régulièrement surface sur internet. On lit alors des contradicteurs affirmer que $0,999999\cdots$ est infiniment proche de 1 mais n'est pas égal à 1 car il « manquerait » une décimale. C'est nécessairement une profonde incompréhension des séries et de l'infini (car on voit mal où irait se mettre cette décimale manquante) qui amène à faire ce genre de déclaration. Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, il n'existe pas de paire de nombres (x, y) distincts mais tout de même infiniment proches. Si $x \neq y$, alors x et y sont bien nettement séparés par une distance non nulle, qui n'est autre que $|y - x|$.
En réalité, les mathématicien·nes ont construit des modèles alternatifs de $\mathbb{R}$ où il existe un nombre ϵ à la fois strictement positif (et donc différent de 0) et infiniment proche de 0 (c'est-à-dire plus petit que tous les nombres réels strictement positifs), mais c'est une histoire qui nous amènerait dans des contrées beaucoup trop sauvages pour cette année, j'ai nommé l'analyse non standard et ses nombres hyperréels...