DS1

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A+I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = -U\}$.

a) Résoudre le système : $(S) \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\ \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big)$.

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

c) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

d) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1 - x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

4. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en **Python**.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10. ***a)*** Montrer : $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de G en $+\infty$.

b) Montrer : $\forall x \in\ ]-\infty,0],\ G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de G en $-\infty$.

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G\big(\ln(3)\big)$.

Exercice 3

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie I : Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Compléter la fonction **Python** suivante, qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x, pour qu'elle renvoie le réel $P_n(x)$.

```
def P(n, x):
    S = 0
    for k in ____________________ :
        S = _____________________________
    return S
```

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

où P_n' désigne la dérivée de P_n.

3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

5. ***a)*** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geqslant 0$.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2$$

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de x_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε. On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 1 et 2.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de P_n sur $[1, 2]$, en distinguant les cas $P_n(c) < 0$ et $P_n(c) \geqslant 0$, on peut déterminer si x_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de x_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 1 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
def approx_x(n, eps):
    a = 1
    b = 2
    while _____________ :
        c = (a+b)/2
        if P(n, c) < 0:
            _________
        else:
            _________
    return (a+b)/2
```

Partie II : Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

7. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt$$

8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\, dt$$

9. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$$

10. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

11. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4

On admet le résultat suivant, qui sera vu en cours plus tard dans le chapitre sur les séries :

Théorème 1. *(Critère d'équivalence)*

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}}$

Remarque : le critère est encore valable lorsque les séries sont à termes négatifs.

Soit $\theta \in]2, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+\theta} u_n \end{cases}$$

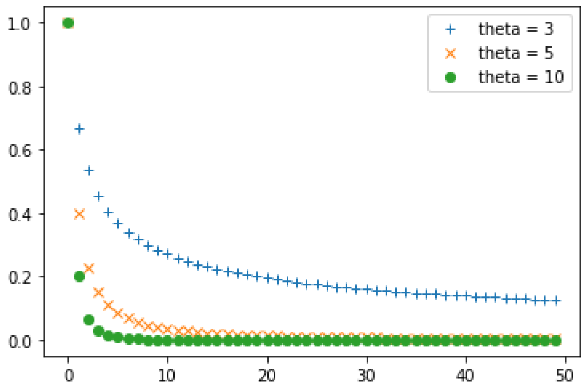
1. *Informatique.*

a) Écrire une fonction **Python**, nommée `premTermeU`, qui :

- prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel `theta` strictement supérieur à 2,
- renvoie un tableau numpy (ou une liste, au choix) qui contient les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Écrire un script **Python**, utilisant la fonction précédente, qui permette de tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\theta = 5$. On utilisera l'option graphique `'x'`.

c) On représente ci-dessous le tracé obtenu pour plusieurs valeurs de θ :



Que peut-on conjecturer sur la suite (u_n) ?

2. ***a)*** Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{\theta-2}{2k+\theta}\right)$$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$, puis que $\ell = 0$.

(Indication : utiliser le critère d'équivalence)

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = n^\alpha u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{\theta}{2n}\right)$$

b) Montrer, à l'aide d'un développement limité, que :

$$w_n = (\alpha - a)\frac{1}{n} + \frac{b-\alpha}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où a et b sont deux réels que l'on exprimera en fonction de θ.

c) Montrer qu'il existe une unique valeur de α (que l'on précisera et que l'on notera γ) pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.
(Indication : utiliser le critère d'équivalence)

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum\limits_{k=1}^{n-1} w_k$ en fonction de u_n et de θ.

e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$$