DS1 (barème)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1 (librement inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *a)* Calculer $(A+I)^2$.

- **1 pt :** $(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- **1 pt :** $(A+I)^2 = A^2 - 2A + I$
- **1 pt :** $A^{-1} = -A - 2I$

2. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = -U\}$.

a) Résoudre le système : $(S) \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + \ \ y - \ \ z = 0 \\ \ \ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$

- **2 pts :** $(S) \iff z = -2x + y$

Aucun point si le pivot de Gauss est mal fait

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

- **1 pt : résolution système** $AU = -U \iff z = -2x + y$
- **2 pts :** $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

- **1 pt :** $E_{-1}(A)$ **est un sev**
- **1 pt : famille génératrice de** $E_{-1}(A)$
- **1 pt : famille libre**

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- **3 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1 pt pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **ou** $AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $P^{-1}AP = T$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

- 1 pt : $N = T + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $N^k = 0$ **pour** $k \geqslant 2$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

- 1 pt : $-I$ **et** N **commutent**

- 1 pt : découpage valable car $n \geqslant 1$

- 1 pt : $\forall \geqslant 2$**,** $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $I^{n-k} = I$

- 1 pt : $T^n = (-1)^n I + (-1)^{n+1} nN$

- 1 pt : cas $n = 0$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

- 1 pt : $T^n = (-1)^n (1-n) I + (-1)^{n+1} nT$

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1} \big((n-1)\, I + n\, A\big)$.

- 1 pt

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

- 1 pt

Aucun point si erreur de logique.

Exercice 2 (EML 2009)

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : continuité sur $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, +\infty[$

- 1 pt : continuité en 0

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

- 1 pt : f **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]-\infty, 0[$ **et sur** $]0, +\infty[$

- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{(1-x)\,e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$

c) Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

- 1 pt : $(e^x - 1)^2 \underset{x \to 0}{\sim} x^2$

- 1 pt : $(1-x)\,e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

d) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

- 1 pt : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{1 + x - e^x}{x(e^x - 1)}$

- 1 pt : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$

- 1 pt : f' **est continue en** 0

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1-x)\,e^x - 1$$

- 1 pt : u **dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et** $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = -x\,e^x$ **(0 s'il n'est pas fait mention de la dérivabilité de** u**)**

- 1 pt : variations de u

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$		$-$	
Variations de u	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $u(x) \leqslant 0$
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}^*$**,** $f'(x) < 0$
- **1 pt :** $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$

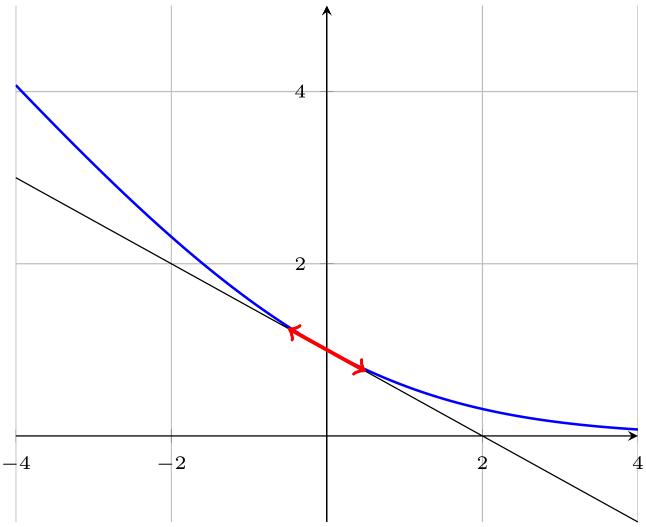
c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- **1 pt : TV**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$		$-$	
Variations de f	$+\infty$	↘	1	↘	0

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **4 pts : 1 pt pour tangente en** 0**, 2 pts pour cohérence courbe, 1 pt propreté**



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

- 1 pt : 0 n'est pas solution

- 1 pt : $\alpha = \ln(2)$ seule solution sur $\mathbb{R}^*$

4. *a)* Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

- 1 pt : $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1 - x)$

- 2 pts : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ (1 pt pour convexité, 1 pt pour tangente en 0)

b) Montrer : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

- 1 pt

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

- 1 pt : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f'(x) < 0$

- 1 pt : $f'(0) \geqslant -\dfrac{1}{2}$

- 1 pt : $\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f'(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

- 5 pts : IAF (2 pts hypothèses, 1 pt IAF, 2 pts $(u_n, \alpha) \in [0, +\infty[^2$)

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

- 1 pt

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

- 4 pts : 1 pt initialisation, 2 pts boucle while, 1 pt print

```
n = 0
u = 1
while np.abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9):
    u = u / (np.exp(u) - 1)
    n += 1
print(n)
```

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en **Python**.

- 3 pts : 2 pts $N = \left\lceil \dfrac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$, 1 pt `int(np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2)))`

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- **1 pt : f continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $G(x) = F(2x) - F(x)$**
- **1 pt : G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $G'(x) = 2\,f(2x) - f(x)$**
- **1 pt : $G' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$**

10. ***a)*** Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de G en $+\infty$.

- **1 pt : $\forall x \in [x, 2x]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant f(x)$**
- **2 pts : $0 \leqslant G(x) \leqslant x\,f(x)$ (dont 1 pt pour $x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$)**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$**

b) Montrer : $\forall x \in\ ]-\infty, 0],\ G(x) \leqslant x f(x)$.

En déduire la limite de G en $-\infty$.

- **1 pt : $\forall x \in [2x, x]$, $f(t) \geqslant f(x)$**
- **2 pts : $G(x) \leqslant x\,f(x)$ (dont 1 pt pour $2x \leqslant x$ car $x \leqslant 0$)**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = -\infty$**

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G\big(\ln(3)\big)$.

- **2 pts**

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $G'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de G	$-\infty$	$\nearrow$	$G(\ln(3))$	$\searrow$	0

Exercice 3 (`EML 2002`)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie I : Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Compléter la fonction **Python** suivante, qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x, pour qu'elle renvoie le réel $P_n(x)$.

```
def P(n, x):
    S = 0
    for k in ___________________ :
        S = ____________________________
    return S
```

- **2 pts :** `for k in range(1,2*n+1) :`
- **2 pts :** `S = S + (-1)**k * x**k / k`

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

où P'_n désigne la dérivée de P_n.

- **1 pt :** $-x \neq 1$
- **1 pt :** $2n$ **est pair**
- **1 pt : calcul correct**

3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

- **1 pt :** $P'_n(x) > 0 \iff x > 1$ **et** $P'_n(x) = 0 \iff x = 1$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$
- **1 pt : TV**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $P'_n(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de P_n	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

- **1 pt :** P_n **est strictement décroissante sur** $[0, 1]$ **donc** $P_n(1) < P_n(0) = 0$

5. *a)* Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

- **2 pts : calcul correct**

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geqslant 0$.

- **1 pt :** $2 \in [0, +\infty[$
- **1 pt :** $P_{n+1}(2) - P_n(2) = 2^{2n+1}\dfrac{2n}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0$ **donc** $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ **est croissante**
- **1 pt :** $P_1(2) = -2 + \dfrac{2^2}{2} = 0$

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2$$

- **1 pt : P_n est continue et P_n est strictement croissante sur** $[1, +\infty[$
- **1 pt : P_n réalise une bijection de** $[1, +\infty[$ **sur** $P_n([1, +\infty[) = [P_n(1), +\infty[$
- **1 pt :** $0 \in [P_n(1), +\infty[$
- **1 pt :** $P_n(1) < 0 = P_n(x_n) \leqslant P_n(2)$ **donc** $1 < x_n \leqslant 2$ **par stricte croissance de P_n sur le segment** $[1, 2]$

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de x_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε. On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 1 et 2.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de P_n sur $[1, 2]$, en distinguant les cas $P_n(c) < 0$ et $P_n(c) \geqslant 0$, on peut déterminer si x_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de x_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 1 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
def approx_x(n, eps):
    a = 1
    b = 2
    while ____________ :
        c = (a+b)/2
        if P(n, c) < 0:
            ________
        else:
            ________
    return (a+b)/2
```

- **1 pt :** `while b-a > eps :`
- **1 pt :** `a = c`
- **1 pt :** `b = c`

Partie II : Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \, dt$$

- **1 pt :** $t \mapsto \dfrac{t^{2n} - 1}{t + 1}$ **est continue sur le segment** $[0, x]$ **donc** $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \, dt$ **existe**
- **1 pt :** $P_n(0) = 0$ **cf question *3***
- **1 pt : calcul correct**

9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$$

- 1 pt : on évalue l'égalité précédente en $x = x_n \in]1,2] \subset [0,+\infty[$

- 1 pt : relation de Chasles

- 1 pt : calcul correct

10. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1,+\infty[$:

$$t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1)$$

- 3 pts : toute preuve correcte (étude de fonction ou inégalité de convexité)

11. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

- 1 pt : $\dfrac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant n(t-1)$

- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant $(1 \leqslant x_n)$

- 1 pt : $(x_n-1)^2 \leqslant \dfrac{2\ln(2)}{n}$

- 1 pt : $x_n - 1 > 0$ **et croissance de** $u \mapsto \sqrt{u}$ **sur** $[0,+\infty[$

- 1 pt : $0 < x_n - 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}$

12. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- 1 pt : théorème d'encadrement

- 1 pt : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Exercice 4 (librement inspiré d'un oral HEC)

On admet le résultat suivant, qui sera vu en cours plus tard dans le chapitre sur les séries :

Théorème 1. *(Critère d'équivalence)*
Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* *à termes positifs*.

Alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}}$

Remarque : le critère est encore valable lorsque les séries sont *à termes négatifs*.

Soit $\theta \in]2, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+\theta} u_n \end{cases}$$

1. *Informatique.*

a) Écrire une fonction **Python**, nommée `premTermeU`, qui :

- prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel `theta` strictement supérieur à 2,
- renvoie un tableau numpy (ou une liste, au choix) qui contient les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
def premTermeU(n, theta):
T = np.zeros(n)
T[0] = 1
for k in range(n-1):
    T[k+1] = T[k] * (2*k + 2) / (2*k + theta)
return T
```

- 1 pt : `T = np.zeros(n)`

- 1 pt : `T[0] = 1`

- 1 pt : `for k in range(n-1):` **(pas de point si la boucle n'a pas la bonne taille)**

- 1 pt : `T[k+1] = T[k] * (2*k + 2) / (2*k + theta)`

- 1 pt : bonus si tout est correct

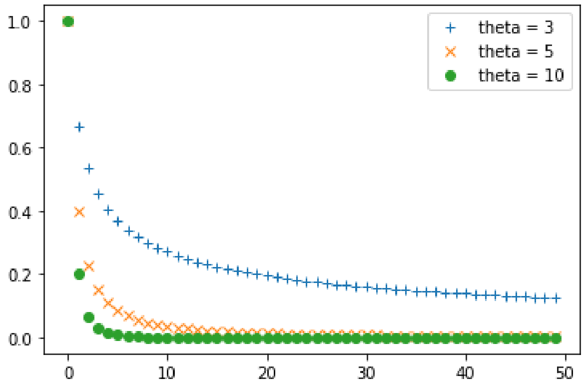
b) Écrire un script **Python**, utilisant la fonction précédente, qui permette de tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\theta = 5$. On utilisera l'option graphique `'x'`.

- 1 pt : `theta = 5` **et** `n = 50`

- 1 pt : `plt.plot(premTermeU(n, theta), 'x')`

- 1 pt : bonus si tout est correct

c) On représente ci-dessous le tracé obtenu pour plusieurs valeurs de θ :



Que peut-on conjecturer sur la suite (u_n) ?

- **1 pt :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** (u_n) **est décroissante**

2. a) Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

Aucun point si la récurrence est mal rédigée.

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

- **1 pt :** $u_{n+1} - u_n = u_n \dfrac{2-\theta}{2n+\theta}$
- **1 pt :** $u_{n+1} - u_n < 0$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

- **1 pt : la suite** (u_n) **est minorée par** 0 **et est décroissante**
- **1 pt : théorème de convergence monotone**

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{\theta-2}{2k+\theta}\right)$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$, puis que $\ell = 0$.

- **1 pt : la série** $\sum \ln\left(1 - \dfrac{\theta-2}{2k+\theta}\right)$ **est à termes négatifs**
- **1 pt :** $\ln\left(1 - \dfrac{\theta-2}{2k+\theta}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\theta-2}{2k}$
- **1 pt : critère de Riemann**
- **1 pt :** $u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)}$ **donc** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = n^\alpha u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{\theta}{2n}\right)$$

- 2 pts : calcul correct

b) Montrer, à l'aide d'un développement limité, que :

$$w_n = (\alpha - a)\frac{1}{n} + \frac{b-\alpha}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où a et b sont deux réels que l'on exprimera en fonction de θ.

- 1 pt : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

- 1 pt : $(\alpha+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\alpha+1}{n} - \dfrac{\alpha+1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

- 1 pt : $\ln\left(1+\dfrac{\theta}{2n}\right) = \dfrac{\theta}{2n} - \dfrac{\theta^2}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

- 1 pt : $a = \dfrac{\theta}{2} - 1$

- 1 pt : $b = \dfrac{\theta^2}{4} - 1$

c) Montrer qu'il existe une unique valeur de α (que l'on précisera et que l'on notera γ) pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.

- 1 pt : cas $\alpha \neq a$

- 3 pts : cas $\alpha = a$

  - 1 pt : $b \neq a$

  - 1 pt : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b-\alpha}{2}\frac{1}{n^2}$

  - 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ **converge par critère de Riemann**

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum\limits_{k=1}^{n-1} w_k$ en fonction de u_n et de θ.

- 1 pt : télescopage

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} w_k = \ln\left(\dfrac{\theta n^\alpha u_n}{2}\right)$

e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$$

- 1 pt : $\ln\left(\dfrac{\theta n^\gamma u_n}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$

- 1 pt : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^\gamma}$ **où** $C = \dfrac{2\mathbf{e}^S}{\theta} > 0$