DS1 (correction)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1 (librement inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A+I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A + I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A+I)^2 = A^2 + 2\,A + I \qquad \textit{(car les matrices } A \textit{ et } I \textit{ commutent)}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & A^2 + 2\,A + I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^2 + 2\,A = -I \\ \text{et} & A\,(A + 2\,I) = -I \\ \text{ainsi} & A\,(-(A+2\,I)) = I \end{array}$$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $-(A+2\,I)$.

$$\boxed{A^{-1} = -A - 2\,I}$$

□

2. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = -U\}$.

a) Résoudre le système : $(S) \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$

Démonstration.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & = & -2\,x & + & y \end{array} \right.$$

$\square$

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

Démonstration.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On a alors :

$$\begin{aligned} AX = -X & \iff (A + I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & = & -2\,x & + & y \end{array} \right. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) & = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -2\,x + y \right\} \\ & = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2\,x + y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Commentaire

- Lors de la résolution du système, on choisit d'exprimer la variable z en fonction des variables x et y. Ces deux dernières variables sont alors appelées variables auxiliaires.
- Il était possible de faire d'autres choix. Par exemple :

$$AX = -X \quad \Leftrightarrow \quad y \;=\; 2\,x + z$$

On obtient alors l'expression de F suivante : $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Notons au passage : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

(il suffit de remplacer le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ par la combinaison linéaire $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$) □

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } E_{-1}(A) \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$:
  - × engendre $E_{-1}(A)$,
  - × est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } E_{-1}(A).}$$

□

3. On note $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1 \right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right)\right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

- On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right)\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On remarque que les deux premières colonnes de la matrice P ne sont autres que les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. C'est ce choix qui permet d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

□

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1}AP = T.}$$

□

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $P^{-1}A^nP = T^n$.

▶ **Initialisation**

- D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.
- D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{array}{rcll} T^{n+1} & = & T \times T^n & \\ & = & P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP & \textit{(d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence)} \\ & = & P^{-1}A(PP^{-1})A^nP & \\ & = & P^{-1}AIA^nP \ = \ P^{-1}A^{n+1}P & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n.}$$

□

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N \ = \ T + I \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Ensuite, pour tout $k \geqslant 2$, $N^k \ = \ N^{k-2} \times N^2 \ = \ N^{k-2} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

Démonstration.

- Les matrices $(-I)$ et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

- Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (-I+N)^n & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^{n-k}\, N^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\; I^{n-k}\, N^k \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\; I\, N^k & \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} (-1)^{n}\, N^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1}\, N^1 & \\
& = & (-1)^n\, I + n\,(-1)^{n-1}\, N & \\
& = & (-1)^n\,(I + (-1)^{-1}\, n\, N) & \\
& = & (-1)^n\,(I - n\,N) & \\
& = & (-1)^n I + (-1)^{n+1} n N &
\end{array}$$

- Enfin : $(-1)^0\,(I - 0 \cdot N) = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = (-1)^n I + (-1)^{n+1} n N.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \;=\; \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la seconde somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

Démonstration.
Comme $N = T + I$, on obtient :

$$(-1)^n\,(I - n\,N) \;=\; (-1)^n\,\big(I - n\,(T+I)\big) \;=\; (-1)^n\,\big((1-n)\,I - n\,T\big) \;=\; (-1)^n(1-n)I + (-1)^{n+1} n T$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ T^n = (-1)^n(1-n)I + (-1)^{n+1}nT.}$$

☐

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,T\big)$.
Or : $A^n = P\ T^n\ P^{-1}$. En combinant ces deux informations, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & P\ T^n\ P^{-1} \ = \ P\ \Big((-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,T\big)\Big)\ P^{-1} \\ & = & (-1)^{n+1}\big((n-1)\,PP^{-1} + n\,PTP^{-1}\big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big).}$$

☐

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} (-1)^{n+1}\big((n-1)\,I + n\,A\big) & = & (-1)^{-1+1}\big((-1-1)\,I + (-1)\,A\big) \\ & = & (-2\,I - A) \ = \ -A - 2\,I \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule trouvée à la question } \textbf{\textit{5.a)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

☐

Exercice 2 (EML 2009)

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction f est continue *(et même de classe $\mathcal{C}^\infty$)* sur $]0, +\infty[$ comme quotient de :
  - × $x \mapsto x$ continue *(de classe $\mathcal{C}^\infty$)* sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.
  - × $x \mapsto e^x - 1$ continue *(de classe $\mathcal{C}^\infty$)* sur $]0, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- De même, la fonction f est continue *(de classe $\mathcal{C}^\infty$)* sur $]-\infty, 0[$.
  Elle est donc continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- De plus, la fonction f est continue en 0. En effet :
  - × d'une part :
  $$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$
  - × d'autre part : $f(0) = 1$.

  Ainsi, on obtient bien : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x\, e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)\, e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x\, e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)\, e^x - 1}{(e^x - 1)^2}}$$

□

c) Montrer : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Démonstration. Soit $x \neq 0$.

- Tout d'abord, $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ donc $(e^x - 1)^2 \underset{x \to 0}{\sim} x^2$.

- Ensuite, on a le développement limité usuel : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}(1-x)\mathrm{e}^x &= (1-x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\end{aligned}$$

D'où $(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et finalement $(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

On obtient alors

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}.}$$

□

d) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Démonstration. On a déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

- Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} - 1}{x}\\ &= \frac{1 + x - \mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x - 1)}\end{aligned}$$

Or, d'après le développement limité usuel de e^x en 0, on a

$$1 + x - \mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

et

$$x(\mathrm{e}^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

D'où

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

- D'après la question précédente, f' est continue en 0.

On peut ainsi conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. D'où

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

□

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = -x\,\mathrm{e}^x$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$:

$$u'(x) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x \leqslant 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$		$-$	
Variations de u	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord : $u(0) \;=\; (1-0)\,\mathrm{e}^0 - 1 \;=\; 1-1 \;=\; 0$.
  - × Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) \;=\; (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 \;=\; \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x - 1$$

  Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.

  D'où, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1$.

  - × Enfin :

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

  Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$.

□

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

Démonstration.

- La fonction u est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $]0, +\infty[$.
  Elle admet donc un maximum en 0. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) \;\leqslant\; \underset{\displaystyle 0}{\underset{\shortparallel}{u(0)}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \leqslant 0}$$

- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) \;=\; \frac{u(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} < 0$$

En effet : $(\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$ et $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

- Enfin, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.}$$

□

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f.

Démonstration.

- Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$.
  De plus : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.}$$

- Ensuite :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}$$

  Or, par croissances comparées : $\dfrac{x}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

- Avec la question ***2.b)***, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$		$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

□

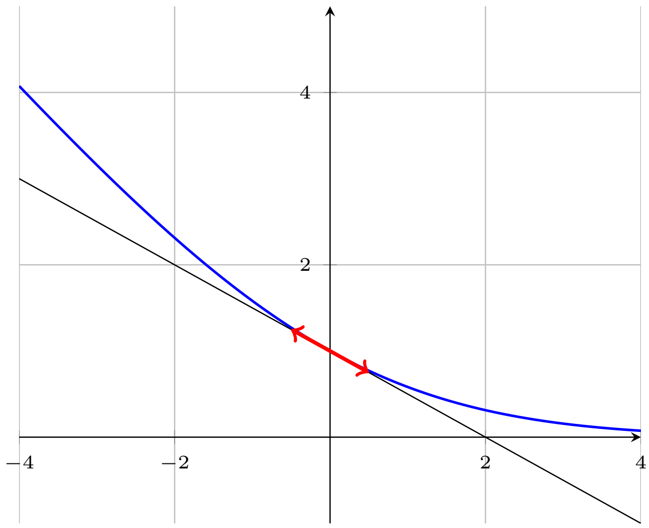
d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.

- Tout d'abord, déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
  Il s'agit de la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f(0) + f'(0)(x - 0) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,x \end{aligned}$$

- On obtient le graphe suivant :



Commentaire

- On s'efforcera de traiter les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes.
- Il est indispensable de faire apparaître les tangentes horizontales. Si on a déterminé d'autres tangentes ou des points d'inflexions auparavant, on doit également les faire apparaître.
- On rappelle qu'un tracé de courbe s'effectue toujours de la façon suivante :
  1) placer le ou les points principaux de la courbe représentative de f (ici seulement le point $\big(0, f(0)\big)$)
  2) placer les tangentes à la courbe (ici la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0)
  3) tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ en prenant en compte le sens de variations de f et les limites de f.

☐

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{array}{rl} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow & \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \\ \Leftrightarrow & \mathrm{e}^x - 1 = 1 \quad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{e}^x = 2 \\ \Leftrightarrow & x = \ln(2) \end{array}$$

- Si $x = 0$, alors : $f(0) = 1$.
On en déduit que 0 n'est pas un point fixe de f.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet pour unique point fixe } \alpha = \ln(2).}$$

☐

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

Démonstration.

- Considérons la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1$$

- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) \ = \ 2\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1 - x)$$

Déterminons le signe de $g'(x)$.

- Comme $e^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1 - x$.
- Or la fonction $h : x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
  On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ se situe au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(0) + h'(0)(x-0) \\ &= e^0 + e^0\, x \ = \ 1 + x \end{aligned}$$

  Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$. D'où :

$$e^x - 1 - x \ \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \geqslant 0.}$$

- La fonction g est donc croissante. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) \ \geqslant \ \underset{\displaystyle 0}{\underset{\shortparallel}{g(0)}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \ e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geqslant 0.}$$

□

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)\,e^x - 1}{(e^x-1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(1-x)\,e^x - 2 + (e^x-1)^2}{2(e^x-1)^2} \\ &= \frac{\cancel{2e^x} - 2x\,e^x - 2 + e^{2x} - \cancel{2e^x} + 1}{2(e^x-1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2x\,e^x - 1}{2(e^x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}.}$$

□

c) Montrer : $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

Démonstration.
Soit $x \in\ [0,+\infty[$.

- Tout d'abord, d'après la question ***2.a)*** :
$$f'(x) \ < \ 0$$
- Démontrons : $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x)$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \neq 0$, alors, d'après la question précédente :
  $$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} - 1}{2(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$$
  Comme $2\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)^2 > 0$, on en déduit que $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de $g(x)$.
  Or, d'après la question ***2.a)*** : $g(x) \geqslant 0$. On en déduit :
  $$f'(x) + \frac{1}{2} \geqslant 0$$
  - × si $x = 0$, alors :
  $$f'(0) = -\frac{1}{2} \ \geqslant \ -\frac{1}{2}$$

  Finalement : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.}$$

□

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

Démonstration.

- D'après les questions précédentes :
  - × f est dérivable sur $[0,+\infty[$,
  - × $\forall x \in [0,+\infty[,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  En effet, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0,+\infty[$:
  $$\begin{array}{ll} & -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0 \\ \text{donc} & -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \text{c'est-à-dire} & |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}$$

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :
  $$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ \ |f(y) - f(x)| \ \leqslant \ \frac{1}{2}\ |y - x|$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite appliquer cette inégalité à $y = u_n$ et $x = \alpha$. Pour cela, vérifions que ces deux termes appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.
  - × D'après le tableau de variations de la question ***2.c)***, $[0, +\infty[$ est un intervalle stable de f.
    De plus : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
    Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$.
  - × D'après la question ***3.*** : $\alpha = \ln(2) \in [0, +\infty[$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant donc l'inégalité précédente à $y = u_n \in [0, +\infty[$ et $x = \alpha \in [0, +\infty[$, on obtient :
  $$|f(u_n) - f(\alpha)| \ \leqslant \ \frac{1}{2} \ |u_n - \alpha|$$
  Or :
  - × $f(u_n) = u_{n+1}$, par définition de la suite (u_n),
  - × $f(\alpha) = \alpha$, car α est un point fixe de f.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \, |u_n - \alpha|}$$

Commentaire

- La démonstration par récurrence de la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$, n'était pas au coeur de cette question et la simple mention de cette récurrence suffisait sans doute à obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- La rédaction de cette dernière aurait été la suivante.
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0, +\infty[$.
  - ▸ **Initialisation** :
    D'après l'énoncé : $u_0 = 1 \in [0, +\infty[$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in [0, +\infty[$).
    - × Par hypothèse de récurrence : $u_n \in [0, +\infty[$.
    - × Ainsi, d'après le tableau de variations de la question ***2.c)*** : $f(u_n) \in [0, 1]$.
      Or : $[0, 1] \subset [0, +\infty[$.
      On en déduit : $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, +\infty[$.

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, +\infty[$.

□

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n} \, (1 - \alpha)$.

▸ **Initialisation** :
- × D'une part, d'après la question ***3.*** : $\dfrac{1}{2^0} \, (1 - \alpha) = 1 - \ln(2)$.
- × D'autre part, comme $u_0 = 1$:
  $$|u_0 - \alpha| \ = \ |1 - \alpha| \ = \ |1 - \ln(2)| \ = \ 1 - \ln(2)$$
  En effet : $1 - \ln(2) \geqslant 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}\,(1-\alpha)$).
D'après la question ***2.d)*** :
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$
Or, par hypothèse de récurrence :
$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha)$$
En combinant ces deux résultats, on obtient :
$$|u_{n+1} - \alpha| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha| \;\leqslant\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha) \;=\; \frac{1}{2^{n+1}}\,(1-\alpha)$$
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,(1-\alpha).}$$

□

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\,(1-\alpha)$.
- Or : $\dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $2^{n+1} \to +\infty$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci qui équivaut à : $u_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \alpha.}$$

□

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Démonstration.

```python
n = 0
u = 1
while np.abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9):
    u = u / (np.exp(u) - 1)
    n += 1
print(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
La variable `n` est initialisée à 0.
La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n), est initialisée à $u_0 = 1$.

```python
n = 0
u = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $|u_n - \alpha| \geqslant 10^{-9}$. Pour cela, on met en place une structure itérative (while) :

```
3 while np.abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9):
```

  Tant que $|u_n - \alpha| \geqslant 10^{-9}$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable `u` :

```
4     u = u / (exp(u) - 1)
```

  On met alors à jour en conséquence la variable `n` : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1}.

```
5     n += 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.
  On affiche alors enfin la valeur de la variable `n`.

```
6 print(n)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Python**. □

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire l'appel correspondant en **Python**.

Démonstration.

- On souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|u_n - \alpha| \; < \; 10^{-9}$$

  Or, d'après la question ***5.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \; \leqslant \; \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$$

  Comme $\alpha \geqslant 0$, on obtient : $1 - \alpha \leqslant 1$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \; \leqslant \; \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \; \leqslant \; \frac{1}{2^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^N} \leqslant 10^{-9}$.
  Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$|u_n - \alpha| \; \leqslant \; \frac{1}{2^N} \; \leqslant \; 10^{-9}$$

- Déterminons alors un entier N vérifiant : $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{1}{2^n} & \leqslant & 10^{-9} & \\ \Leftrightarrow & 2^n & \geqslant & 10^9 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \Leftrightarrow & n\ \ln(2) & \geqslant & 9\ \ln(10) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \Leftrightarrow & n & \geqslant & \dfrac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

  L'entier $N = \left\lceil \dfrac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ convient.

On obtient l'entier cherché par l'appel : `int(np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2)))`.

Commentaire

Si on ne connaît pas α et qu'on souhaite en calculer une approximation à 10^{-9} près, on pourra alors procéder comme suit.

```
N = int(np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2)))
u = 1
for k in range(N):
    u = u / (np.exp(u) - 1)
print(u)
```

□

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\ dt = \big[\ F(t)\ \big]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

La fonction $H : x \mapsto F(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $H = F \circ h$ de :

× $h : x \mapsto 2x$ qui :
  - est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - vérifie : $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

× F qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ en tant que somme de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} G'(x) & = & (F \circ h)'(x) - F'(x) \ = \ (F' \circ h)(x) \times h'(x) - F'(x) \\ & = & F'\big(h(x)\big) \times 2 - F'(x) \ = \ 2F'(2x) - F'(x) \\ & = & 2\, f(2x) - f(x) \end{array}$$
(car F est une primitive de f)

Deux cas se présentent alors :

× si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{array}{rcl} G'(x) & = & 2\, f(2x) - f(x) \\ & = & \dfrac{4x}{e^{2x} - 1} - \dfrac{x}{e^{x} - 1} \\ & = & \dfrac{4x - x\,(e^{x} + 1)}{e^{2x} - 1} \\ & = & \dfrac{x\,(3 - e^{x})}{e^{2x} - 1} \end{array}$$

× si $x = 0$, alors :

$$G'(0) = 2f(2 \times 0) - f(0) = 2\, f(0) - f(0) = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G' : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{x(3 - e^{x})}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.}$$

□

10. a) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$.
  × Soit $t \in [x, 2x]$.

$$\begin{array}{lrcccl} & x & \leqslant & t & \leqslant & 2x \\ \text{donc} & f(x) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(2x) \end{array}$$
(par décroissance de f sur $[0, +\infty[$)

De plus, d'après le tableau de variations de la question ***2.c)*** : $f(t) \geqslant 0$.
Ainsi, pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$0 \ \leqslant \ f(t) \ \leqslant \ f(x)$$

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$, car $x \geqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(t) \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(x) \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & G(x) & & f(x)(2x-x) \; = \; x\, f(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x\, f(x)}$$

Commentaire

On retiendra que l'encadrement / la minoration / la majoration d'une intégrale s'effectue presque toujours de la façon suivante :

1) encadrement / minoration / majoration de son intégrande,

2) utilisation de la croissance de l'intégrale.x

- On a l'équivalent suivant :

$$x\, f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x}$$

Or, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$. On en déduit : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\, f(x) = 0$.

On obtient alors :

× $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 0 = 0$,

× $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\, f(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{x \to +\infty} G(x) = 0.}$$

□

b) Montrer : $\forall x \in]-\infty, 0],\ G(x) \leqslant x\, f(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in]-\infty, 0]$.

× Soit $t \in [2x, x]$.

$$2x \;\leqslant\; t \;\leqslant\; x$$

donc $\quad f(2x) \;\geqslant\; f(t) \;\geqslant\; f(x)$ *(par décroissance de f sur $[0,+\infty[$)*

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2x \leqslant x$, car $x \leqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{2x}^{x} f(t) \, dt & \geqslant & \displaystyle\int_{2x}^{x} f(x) \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ -\displaystyle\int_x^{2x} f(t) \, dt & & -\displaystyle\int_x^{2x} f(x) \, dt \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_x^{2x} f(t) \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} f(x) \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ G(x) & & f(x)(2x-x) \; = \; x\, f(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \,]-\infty, 0],\ G(x) \leqslant x\, f(x)}$$

- D'après la question ***2.c)*** : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} x\, f(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de comparaison : } \lim_{x\to-\infty} G(x) = -\infty.}$$

□

11. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Démonstration.

- D'après la question ***9*** :

$$G' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\,(3-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le signe de $G'(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

× Étudions le signe de $(3-\mathrm{e}^x)$.

$$\begin{aligned} 3-\mathrm{e}^x \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \geqslant \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(3) \geqslant x \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

× Étudions le signe de $\mathrm{e}^{2x}-1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x}-1 \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2x} \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x \geqslant 0 \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3-\mathrm{e}^x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\mathrm{e}^{2x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $G'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	

- On obtient enfin le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $G'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de G	$-\infty$	$\nearrow$	$G(\ln(3))$	$\searrow$	0

□

Exercice 3 (EML 2002)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie I : Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Compléter la fonction **Python** suivante, qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x, pour qu'elle renvoie le réel $P_n(x)$.

```
def P(n, x):
    S = 0
    for k in ___________________ :
        S = ____________________________
    return S
```

Démonstration. Par exemple :

```
def P(n, x):
    S = 0
    for k in range(1,2*n+1) :
        S = S + (-1)**k * x**k / k
    return S
```

□

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

où P_n' désigne la dérivée de P_n.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction P_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ car polynomiale. Soit $x \in [0, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} x^k \\
&= -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^k \\
&= -\frac{1 - (-x)^{2n}}{1 - (-x)} && \textit{(car } -x \neq 1\textit{)} \\
&= -\frac{1 - x^{2n}}{1 + x} && \textit{(car } 2n \textit{ est pair)} \\
&= \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}
\end{aligned}$$

□

3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

Démonstration. Soit $x \in [0, +\infty[$.

- $x + 1 > 0$ donc

$$P'_n(x) > 0 \iff x^{2n} - 1 > 0 \iff x^{2n} > 1 \iff x > 1 \qquad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}$$

- De plus,

$$P'_n(x) = 0 \iff x^{2n} - 1 = 0 \iff x^{2n} = 1 \iff x = 1 \qquad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}$$

Ainsi, P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, 1]$.
De plus,

- $P_n(0) = 0$
- $P_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^{2n}}{2n}$ (terme dominant) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations de P_n :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $P'_n(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de P_n	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

□

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$. On en déduit que

$$\boxed{P_n(1) < P_n(0) = 0}$$

□

5. ***a)*** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\
&= P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \\
&= P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)
\end{aligned}$$

□

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente évaluée en $x = 2 \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2) &= P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right) \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1}\frac{2(2n+1)-(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1}\frac{2n}{(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

et donc $P_{n+1}(2) - P_n(2) = 2^{2n+1}\dfrac{2n}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0$, ce qui prouve que la suite $(P_n(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

De plus, $P_1(2) = -2 + \dfrac{2^2}{2} = 0$. D'où :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(2) \geqslant 0.}$$

□

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2$$

Démonstration. On sait que :

- P_n est continue sur $[1, +\infty[$
- P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, P_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $P_n([1, +\infty[) = [P_n(1), +\infty[$.

Or, $P_n(1) < 0$ (cf question *4*) donc $0 \in [P_n(1), +\infty[$.

On en déduit que 0 admet un unique antécédent par la fonction P_n dans $[1, +\infty[$. Autrement dit,

$$\boxed{\text{l'équation } P_n(x) = 0, \text{ d'inconnue } x \in [1, +\infty[, \text{ admet une unique solution.}}$$

On la note x_n. On sait d'après les questions *4* et ***5.b)*** que

$$P_n(1) < 0 = P_n(x_n) \leqslant P_n(2)$$

On en déduit, par stricte croissance de P_n sur le segment $[1, 2]$, que

$$\boxed{1 < x_n \leqslant 2}$$

□

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et ε un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de x_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε. On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 1 et 2.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de P_n sur $[1, 2]$, en distinguant les cas $P_n(c) < 0$ et $P_n(c) \geqslant 0$, on peut déterminer si x_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.

- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de x_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 1 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
def approx_x(n, eps):
    a = 1
    b = 2
    while ______________ :
        c = (a+b)/2
        if P(n, c) < 0:
            __________
        else:
            __________
    return (a+b)/2
```

Démonstration. On propose la solution suivante :

```
def approx_x(n, eps):
    a = 1
    b = 2
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if P(n, c) < 0:
            a = c
        else:
            b = c
    return (a+b)/2
```

□

Partie II : Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$ est continue sur le segment $[0, x]$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$ existe bien et :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt &= \int_0^x P_n'(t)\,dt \\ &= P_n(x) - P_n(0) \\ &= P_n(x) \qquad\qquad \textit{(car } P_n(0)=0 \textit{ cf question } \textbf{\textit{3}}\textit{)}\end{aligned}$$

□

9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On évalue l'égalité précédente en $x = x_n \in]1, 2] \subset [0, +\infty[$:

$$\int_0^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt = P_n(x_n) = 0$$

et donc, par relation de Chasles :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt = 0$$

ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt &= -\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\, dt \end{aligned}$$

□

10. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} \forall t \in [1, +\infty[,\ t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1) &\iff \forall t \in [1, +\infty[,\ (t^2)^n - 1 \geqslant n(t^2 - 1) \\ &\iff \forall u \in [1, +\infty[,\ u^n - 1 \geqslant n(u - 1) \end{aligned}$$

On reconnait alors une inégalité de convexité puisque :

- la fonction $\varphi : u \mapsto u^n - 1$ est convexe sur $[1, +\infty[$.
- sa tangente en 1 a pour équation : $y = n(x - 1)$. En effet, $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = n$.

La courbe représentative de φ étant au-dessus de sa tangente en 1, on a bien :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in [1, +\infty[,\ t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)}$$

Commentaire

On pouvait aussi étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1)$.

□

11. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\, dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [1, +\infty[$. On a

$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)$$

et $t+1>0$ donc
$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant \frac{n(t^2-1)}{t+1} = n\frac{(t-1)(t+1)}{t+1} = n(t-1)$$
Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($1 \leqslant x_n$) :
$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \geqslant \int_1^{x_n} n(t-1)\, dt = n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n} = \frac{n}{2}(x_n-1)^2$$

Ensuite,
- $x_n - 1 > 0$ d'après la question ***6***.
- $$\begin{aligned} \frac{n}{2}(x_n-1)^2 &\leqslant \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt && \textit{(cf question } \boldsymbol{8}\textit{)} \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{t+1}\, dt && \textit{(par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant)} \\ &= \left[\ \ln(t+1)\ \right]_0^1 \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

  donc
  $$(x_n-1)^2 \leqslant \frac{2\ln(2)}{n}$$
  et, par croissance de $u \mapsto \sqrt{u}$ sur $[0,+\infty[$:
  $$x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

Finalement,
$$\boxed{0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}.}$$

□

12. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration. On a $\dfrac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par théorème d'encadrement : $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut conclure que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est convergente et } x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$$

□

Exercice 4 (librement inspiré d'un oral HEC)

On admet le résultat suivant, qui sera vu en cours plus tard dans le chapitre sur les séries :

Théorème 1. *(Critère d'équivalence)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
Alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}}$
Remarque : le critère est encore valable lorsque les séries sont à termes négatifs.

Soit $\theta \in]2, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+\theta} u_n \end{cases}$$

1. *Informatique.*

a) Écrire une fonction **Python**, nommée `premTermeU`, qui :

- prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel `theta` strictement supérieur à 2,
- renvoie un tableau numpy (ou une liste, au choix) qui contient les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. On propose la fonction **Python** suivante :

```
def premTermeU(n, theta):
T = np.zeros(n)
T[0] = 1
for k in range(n-1):
    T[k+1] = T[k] * (2*k + 2) / (2*k + theta)
return T
```

□

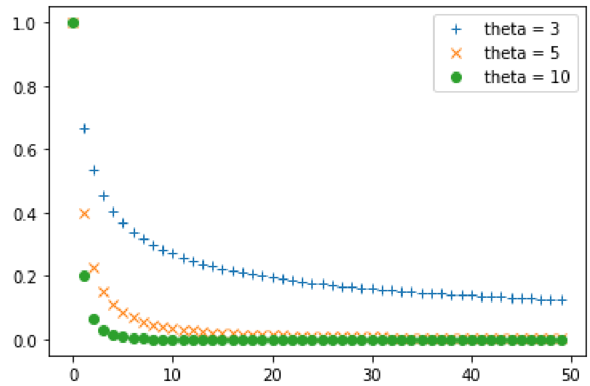
b) Écrire un script **Python**, utilisant la fonction précédente, qui permette de tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\theta = 5$. On utilisera l'option graphique `'x'`.

Démonstration. On propose le script **Python** suivant :

```
theta = 5
n = 50
plt.plot(premTermeU(n, theta), 'x')
plt.show()
```

□

c) On représente ci-dessous le tracé obtenu pour plusieurs valeurs de θ :



Que peut-on conjecturer sur la suite (u_n) ?

Démonstration. On peut conjecturer que

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante et } u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

□

2. ***a)*** Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ »
<u>Initialisation</u> :
Par définition, $u_0 = 1 > 0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+\theta} u_n > 0$$

car $2n+2 \geqslant 2 > 0$, $2n+\theta \geqslant \theta > 0$ et $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a démontré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. □

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+2}{2n+\theta} u_n - u_n \\ &= u_n \left(\frac{2n+2}{2n+\theta} - 1 \right) \\ &= u_n \frac{2n+2-(2n+\theta)}{2n+\theta} \\ &= u_n \frac{2-\theta}{2n+\theta} \\ &< 0 && \textit{(car } \theta > 2 \textit{ et } u_n > 0\textit{)} \end{aligned}$$

□

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Démonstration. D'après les deux questions précédentes :

- la suite (u_n) est minorée par 0

- la suite (u_n) est décroissante

D'après le théorème de convergence monotone :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente et sa limite } \ell \text{ vérifie } \ell \geqslant 0.}$$

□

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta}\right)$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $\ln(u_n)$ existe.
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $\ln(u_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \dfrac{\theta - 2}{2k + \theta}\right)$ »
<u>Initialisation</u> :
D'une part, $\ln(u_0) = \ln(1) = 0$. D'autre part, $\sum\limits_{k=0}^{-1} \ln\left(1 - \dfrac{\theta - 2}{2k + \theta}\right) = 0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) &= \ln\left(\frac{2n+2}{2n+\theta} u_n\right) \\
&= \ln(u_n) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+\theta}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta}\right) + \ln\left(\frac{2n+\theta+2-\theta}{2n+\theta}\right) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta}\right) + \ln\left(1 + \frac{2-\theta}{2n+\theta}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta}\right) + \ln\left(1 - \frac{\theta-2}{2n+\theta}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a démontré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \dfrac{\theta - 2}{2k + \theta}\right)$. □

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = -\infty$, puis que $\ell = 0$.
(Indication : utiliser le critère d'équivalence)

Démonstration. • La série $\sum \ln\left(1 - \dfrac{\theta - 2}{2k + \theta}\right)$ est à termes négatifs

- $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\theta - 2}{2k + \theta} = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{\theta - 2}{2k + \theta}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\theta - 2}{2k + \theta} \underset{k \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\theta - 2}{2k}$
- La série $\sum \dfrac{1}{k}$ est divergente par critère de Riemann donc la série $\sum -\dfrac{\theta - 2}{2k}$ est également divergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant le terme général par une constante non nulle)

D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes négatifs, on en déduit que la série $\sum \ln\left(1 - \dfrac{\theta - 2}{2k+\theta}\right)$ est divergente.
Il vient alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{\theta - 2}{2k+\theta}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty, \qquad i.e.\ \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)}$ donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

□

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = n^\alpha u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{\theta}{2n}\right)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \\
&= \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+\theta}\right) \\
&= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{\theta}{2n}}\right) \\
&= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{\theta}{2n}\right) \\
&= (\alpha+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{\theta}{2n}\right)
\end{aligned}$$

□

b) Montrer, à l'aide d'un développement limité, que :

$$w_n = (\alpha - a)\frac{1}{n} + \frac{b-\alpha}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où a et b sont deux réels que l'on exprimera en fonction de θ.

Démonstration. Tout d'abord, on a le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

D'où

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc

$$\begin{aligned}(\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{\alpha+1}{n} - \frac{\alpha+1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

- $\ln\left(1+\frac{\theta}{2n}\right) = \frac{\theta}{2n} - \frac{\theta^2}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On en déduit que

$$\begin{aligned}w_n &= \frac{\alpha+1}{n} - \frac{\alpha+1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{\theta}{2n} - \frac{\theta^2}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \left(\alpha+1-\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{\theta^2}{8} - \frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \left(\alpha - \left(\frac{\theta}{2}-1\right)\right)\frac{1}{n} + \frac{\frac{\theta^2}{4}-1-\alpha}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= (\alpha-a)\frac{1}{n} + \frac{b-\alpha}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

où

$$\boxed{a = \frac{\theta}{2} - 1 \text{ et } b = \frac{\theta^2}{4} - 1.}$$

□

c) Montrer qu'il existe une unique valeur de α (que l'on précisera et que l'on notera γ) pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.
(Indication : utiliser le critère d'équivalence)

Démonstration. Raisonnons par disjonction de cas.

- Premier cas : $\alpha \neq a$.
  Alors $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (\alpha-a)\frac{1}{n}$ et donc w_n ne change plus de signe à partir d'un certain rang.
  De plus, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann, donc par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs (ou à termes négatifs), on en déduit que la série $\sum w_n$ diverge également.
- Deuxième cas : $\alpha = a$.
  Alors on remarque que :

$$b = \frac{\theta^2}{4} - 1 = \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\theta}{2}-1\right)\left(\frac{\theta}{2}+1\right) = a\left(\frac{\theta}{2}+1\right)$$

  Or, $a \neq 0$ (car $\theta \neq 2$) et $\frac{\theta}{2} + 1 \neq 1$ (car $\theta \neq 0$) donc $b \neq a$.
  Ceci permet de conclure que $b - \alpha \neq 0$ et donc

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b-\alpha}{2}\frac{1}{n^2}$$

On applique ici aussi le critère d'équivalence, mais la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann, donc la série $\sum w_n$ converge.
Ainsi, il existe bien une unique valeur de α pour laquelle la série $\sum w_n$ converge. Cette valeur est

$$\boxed{\gamma = a = \frac{\theta}{2} - 1.}$$

□

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n-1} w_k$ en fonction de u_n et de θ.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} w_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(v_{k+1}) - \ln(v_k) \\ &= \ln(v_n) - \ln(v_1) && \textit{(par télescopage)} \\ &= \ln(n^\alpha u_n) - \ln(u_1) \\ &= \ln(n^\alpha u_n) - \ln\left(\frac{2}{\theta}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\theta n^\alpha u_n}{2}\right)\end{aligned}$$

□

e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$$

Démonstration. Nous avons vu que lorsque $\alpha = \gamma$, la série $\sum w_n$ est convergente. Notons S la somme de cette série dans ce cas là. On a alors, d'après la question précédente :

$$\ln\left(\frac{\theta n^\gamma u_n}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$$

et par continuité de l'exponentielle :

$$\frac{\theta n^\gamma u_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^S$$

d'où, puisque $\mathrm{e}^S \neq 0$,

$$\frac{\theta n^\gamma u_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^S$$

ce qui se réécrit finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$$

où

$$\boxed{C = \frac{2\mathrm{e}^S}{\theta} > 0.}$$

□