

1 Exercices

Exercice 1 : Donner les dérivées des fonctions usuelles suivantes.

1. $x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}$)

3. $x \mapsto \frac{1}{x}$

5. $x \mapsto e^x$

2. $x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$)

4. $x \mapsto \sqrt{x}$

6. $x \mapsto \ln(x)$

Exercice 2 : Soient u et v deux fonctions dérivables. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante. Donner les formules des dérivées suivantes.

1. $(\alpha u)'$

3. $(uv)'$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)'$

2. $(u + v)'$

4. $\left(\frac{1}{v}\right)'$

6. $(u \circ v)'$

Exercice 3 : Calculer les dérivées des fonctions polynomiales suivantes.

1. $x \mapsto x^2 + 2x - 3$

3. $x \mapsto x^3 - 3x - 7$

5. $x \mapsto 5x^4 + 4x^2$

2. $x \mapsto x^{2n} - x^{2n+1}$ (où $n \in \mathbb{N}$)

4. $x \mapsto 3x^2 + 7x$

6. $x \mapsto -x^3 + 3x^2 - 10x + 10$

Exercice 4 : Calculer les dérivées des produits de fonctions par une constante suivants.

1. $x \mapsto 2e^x$

3. $x \mapsto 3\sqrt{x}$

5. $x \mapsto \frac{-4}{x}$

2. $x \mapsto 4\ln(x)$

4. $x \mapsto -7e^x$

6. $x \mapsto -10\ln(x)$

Exercice 5 : Calculer les dérivées des produits de fonctions suivants.

1. $x \mapsto x^2 e^x$

3. $x \mapsto e^x \sqrt{x}$

5. $x \mapsto \frac{1}{x} \ln(x)$

2. $x \mapsto x^3 \ln(x)$

4. $x \mapsto 2e^x \ln(x)$

6. $x \mapsto e^x \sqrt{x} \ln(x)$

Exercice 6 : Calculer les dérivées des quotients de fonctions suivants.

1. $x \mapsto \frac{x+1}{2x-3}$

3. $x \mapsto \frac{e^x}{x^3}$

5. $x \mapsto \frac{xe^x}{\ln(x)}$

2. $x \mapsto \frac{x^3 + 2x - 1}{e^x}$

4. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

6. $x \mapsto \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{x+1}$

Exercice 7 : Calculer les dérivées des fonctions de la forme $\exp \circ u$ suivantes.

1. $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$

3. $x \mapsto e^{x^2+3x}$

5. $x \mapsto e^{\frac{1}{1+x^2}}$

2. $x \mapsto e^{-2x}$

4. $x \mapsto e^{e^x}$

6. $x \mapsto e^{\frac{-x^2}{a}}$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$)

Exercice 8 : Calculer les dérivées des fonctions de la forme $\ln \circ u$ suivantes.

1. $x \mapsto \ln(1+x^2)$

3. $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{e^x}{x+3}\right)$

5. $x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$

2. $x \mapsto \ln(x^2 + 3x^3 + e^{-x})$

4. $x \mapsto \ln(1 + x^4 \ln(x))$

6. $x \mapsto \ln(x - e^{3x^2+1})$

Exercice 9 : Calculer les dérivées des fonctions « type concours » suivantes.

1. $x \mapsto \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt$ (où $n \in \mathbb{N}$)

7. $x \mapsto x - \ln(x)$

14. $x \mapsto x^2 - x \ln(x)$

2. $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$

8. $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} dt$

15. $x \mapsto xe^{-x}$

3. $x \mapsto x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$ (où $n \in \mathbb{N}$)

9. $x \mapsto \sqrt{1+x}$

16. $x \mapsto ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}$
(où $n \in \mathbb{N}^*$)

4. $x \mapsto x + \frac{1}{x}$

10. $x \mapsto \ln(x) - ax^{2a}$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$)

17. $x \mapsto x^2 e^x - 1$

5. $x \mapsto \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$

11. $x \mapsto e^x - e \ln(x)$

18. $x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$

6. $x \mapsto \int_0^x \ln(1+t^2) dt$

12. $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$

19. $x \mapsto x - e^{-x}$

13. $x \mapsto \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$ (où $n \in \mathbb{N}$)

20. $x \mapsto \frac{1+x}{1+e^x}$

2 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

1. $x \mapsto nx^{n-1}$

3. $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$

5. $x \mapsto e^x$

2. $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$

4. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $x \mapsto \frac{1}{x}$

Réponses de l'exercice 2 :

1. $\alpha u'$

3. $u'v + uv'$

5. $\frac{u'v - uv'}{v^2}$

2. $u' + v'$

4. $\frac{-v'}{v^2}$

6. $v' \times (u' \circ v)$

Réponses de l'exercice 3 :

1. $x \mapsto 2x + 2$

3. $x \mapsto 3x^2 - 3$

5. $x \mapsto 20x^3 + 8x$

2. $x \mapsto 2nx^{2n-1} - (2n+1)x^{2n}$

4. $x \mapsto 6x + 7$

6. $x \mapsto -3x^2 + 6x - 10$

Réponses de l'exercice 4 :

1. $x \mapsto 2e^x$

3. $x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{x}}$

5. $x \mapsto \frac{4}{x^2}$

2. $x \mapsto \frac{4}{x}$

4. $x \mapsto -7e^x$

6. $x \mapsto \frac{-10}{x}$

Réponses de l'exercice 5 :

1. $x \mapsto x(2+x)e^x$

3. $x \mapsto \frac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}$

5. $x \mapsto \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))$

2. $x \mapsto x^2(3\ln(x) + 1)$

4. $x \mapsto 2e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right)$

6. $x \mapsto e^x \frac{2x \ln(x) + \ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$

Réponses de l'exercice 6 :

1. $x \mapsto \frac{-5}{(2x-3)^2}$

3. $x \mapsto \frac{x-3}{x^4} e^x$

5. $x \mapsto \frac{(x+1)\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} e^x$

2. $x \mapsto \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x + 3}{e^x}$

4. $x \mapsto \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

6. $x \mapsto \frac{\ln(x)(1-x) + 2x + 2}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

Réponses de l'exercice 7 :

1. $x \mapsto -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

3. $x \mapsto (2x+3)e^{x^2+3x}$

5. $x \mapsto \frac{-2x}{(1+x^2)^2}e^{\frac{1}{1+x^2}}$

2. $x \mapsto -2e^{-2x}$

4. $x \mapsto e^x e^{e^x}$

6. $x \mapsto \frac{-2x}{a}e^{\frac{-x^2}{a}}$

Réponses de l'exercice 8 : Calculer les dérivées des fonctions de la forme \ln ou suivantes.

1. $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$

3. $x \mapsto \frac{e^x(x+2)}{(x+3)(x+3+e^x)}$

5. $x \mapsto \frac{1}{(x+2)(x+3)}$

2. $x \mapsto \frac{2x+9x^2-e^{-x}}{x^2+3x^3+e^{-x}}$

4. $x \mapsto \frac{x^3(4\ln(x)+1)}{1+x^4\ln(x)}$

6. $x \mapsto \frac{1-6xe^{3x^2+1}}{x-e^{3x^2+1}}$

Réponses de l'exercice 9 :

1. $x \mapsto \frac{x^{2n}-1}{x+1}$

7. $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$

14. $x \mapsto 2x - 1 - \ln(x)$

2. $x \mapsto \frac{x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)}{x(x-1)(\ln(x))^2}$

8. $x \mapsto \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)}$

15. $x \mapsto (1-x)e^{-x}$

3. $x \mapsto nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}}$

9. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

16. $x \mapsto ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-2}(ne^{-x}-1)$

4. $x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$

10. $x \mapsto \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1}$

17. $x \mapsto xe^x(2+x)$

11. $x \mapsto e^x - \frac{e}{x}$

18. $x \mapsto e^x + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$

5. $x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

12. $x \mapsto \frac{-2}{(1+x)^3}$

19. $x \mapsto 1 + e^{-x}$

6. $x \mapsto \ln(1+x^2)$

13. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

20. $x \mapsto \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$