Colles de Mathématiques en E2A
Développements limités, suites
Semaine 3 : 18-23 septembre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre I : Développements limités

1.1 Définitions

— f est négligeable devant g en x_0. Notation $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$.

— f est équivalente à g en x_0. Notation $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

— f est continue en x_0.

— Taux d'accroissement en x_0. f est dérivable en x_0.

— Tangentes à la courbe représentative.

— Asymptotes verticales et horizontales.

— Développement limité d'ordre 1, puis d'ordre 2, en un point x_0.

1.2 Résultats

— Théorème des croissances comparées.

— Propriétés de la relation d'équivalence. En particulier : compatibilité avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance fixe.

— Equation de la tangente (ou des demi-tangentes) en un point. Inégalités de convexité classiques.

— Formules de Taylor-Young à l'ordre 1, puis à l'ordre 2, en un point x_0.

— Développements limités usuels en 0.

— Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente.

1.3 Méthodes

1. Il faut savoir déterminer un équivalent d'une somme de fonctions en trouvant le terme dominant.
2. On démontre `TOUJOURS` la continuité d'une fonction définie par morceaux sur des intervalles `OUVERTS` puis aux points restants (aux bords des intervalles ouverts considérés). La continuité en un point se fait par un calcul de limites (éventuellement en séparant les cas à gauche et à droite).

3. De même, on démontre `TOUJOURS` la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux sur des intervalles `OUVERTS` puis aux points restants (aux bords des intervalles ouverts considérés). La dérivabilité en un point se fait par un calcul de limite du taux d'accroissement (éventuellement en séparant les cas à gauche et à droite).
4. Il faut savoir démontrer qu'une composée de deux fonctions est continue/dérivable/de classe $\mathcal{C}^1$/de classe $\mathcal{C}^2$.
5. Si la question est précisément de démontrer la régularité d'une fonction, il faut décomposer cette fonction en fonctions usuelles via les opérations élémentaires et expliquer pourquoi chacune d'elles est régulière.
6. Il faut connaître quelques méthodes de calcul en pratique des DL :
   — changement de variable $x \leftarrow -x$
   — troncature
   — calcul via les dérivées
   — somme/produit/composition. Citation du programme officiel : « Aucune connaissance (somme, produit, composition...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible. » Il faut donc s'en tenir à des exemples **très simples** et ne pas centrer le travail là dessus.
7. Il faut savoir calculer un équivalent à l'aide d'un développement limité :
   Soit f une fonction qui admet un $\mathrm{DL}_2(0)$: $f(x) = a + bx + cx^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
   — Si $a \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a$.
   — Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} bx$.
   — Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} cx^2$.
8. Il faut savoir tracer la courbe représentative d'une fonction dès lors que l'on dispose de son tableau de variations.

2 Chapitre II : suites

2.1 Définitions

— Suite (de nombre réels), suite (strictement) croissante/décroissante/monotone, suite stationnaire, suite majorée/minorée/bornée, maximum/minimum atteint en un rang n_0, suite extraite.
— Suites usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2.
— Suite convergente/divergente, limite d'une suite, nature d'une suite.
— Suites adjacentes.
— Intervalle stable par une fonction (hors-programme, mais essentiel à la bonne compréhension de la logique des exercices sur les suites récurrentes), point fixe d'une fonction.
— Suite négligeable devant une autre, suite équivalente à une autre.

2.2 Résultats

— Formule explicite du terme général d'une suite usuelle.
— Opérations sur les limites, compatibilité de la limite avec la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (passage à la limite dans les inégalités).
— Pour démontrer des limites : théorème de comparaison, théorème d'encadrement, théorème de convergence monotone, théorème de convergence des suites adjacentes.
— Théorème de composition des limites. Pour les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, savoir démontrer que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $\ell = f(\ell)$.
— Inégalité des accroissements finis.
— Théorème des croissances comparées.
— Opérations sur les équivalents, équivalents usuels (avec exp et ln).

2.3 Méthodes

- Trouver le sens de variations d'une suite donnée explicitement.
- Trouver l'expression explicite du terme général d'une suite usuelle.
- Trouver un équivalent simple d'une suite donnée explicitement. Bien distinguer la méthode pour trouver l'équivalent d'une somme et la méthode pour trouver l'équivalent d'un produit/quotient.
- Faire l'étude d'une suite définie par récurrence, de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, dans des cas peu techniques. Exercice à étapes, comme à l'écrit.
- Faire l'étude d'une suite définie de manière implicite, dans des cas peu techniques. Exercice à étapes, comme à l'écrit.
- Déterminer la limite d'une suite (catalogue de méthodes, en particulier : croissances comparées et calcul d'équivalent).

3 Questions de cours

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   Démontrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Que vaut $f'(0)$?
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel x positif et renvoie le réel $f(x)$, puis, écrire un script **Python** (utilisant la fonction précédente) permettant de tracer le graphe de la fonction f sur le segment $[0, 3]$. On pourra utiliser la commande `np.linspace` ou `np.arange`.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
5. Limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{e^x + x^2}{e^x - 1}\right)$?
6. Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$$

7. Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_n \end{cases}$$

8. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \end{cases}$$

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.