Exos de cours

Exercice 1 : On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Trouver trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$

2. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

1. $\sum \dfrac{n^2 - n}{n^3}$
2. $\sum \dfrac{n^2 + n}{n^3}$
3. $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n^2}$
4. $\sum \dfrac{(\ln n)^a}{n}$ (où $a \in \mathbb{R}^+$)
5. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$
6. $\sum \dfrac{n+1}{(n+3)^2}$
7. $\sum n^4 \, \mathrm{e}^{-n}$
8. $\sum n^n \, \mathrm{e}^{-n}$
9. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
10. $\sum \dfrac{1}{n\,2^n}$
11. $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}$
12. $\sum \dfrac{1}{3^n - 2^n}$
13. $\sum \dfrac{n+2}{n^3+1}$
14. $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$
15. $\sum \dfrac{n}{\ln(n)}$
16. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$
17. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
18. $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$
19. $\sum \dfrac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$
20. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$
21. $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
22. $\sum \dfrac{1}{n^2 - n}$
23. $\sum \dfrac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$
24. $\sum \ln\left(\dfrac{n^2 + n^4}{2n^4}\right)$
25. $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$
26. $\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$
27. $\sum \dfrac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$
28. $\sum \left(\dfrac{5n+1}{6n+2}\right)^n$
29. $\sum \dfrac{n! + 1}{(n+1)!}$
30. $\sum \dfrac{1}{2^n + 3^n}$
31. $\sum \dfrac{2^n + n}{n2^n}$
32. $\sum \dfrac{2^n + n}{n^2 2^n}$
33. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
34. $\sum e^{-\sqrt{n}}$
35. $\sum \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n^8 + 8n^5 + 7n}$
36. $\sum \dfrac{-5n^2 + 3n - 8}{n^8 - 8n^5 - 7n}$

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2 \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.
4. Prouver que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 4 :*(d'après* `EML 1992`*)*
On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que : $\forall k \geq 3$, on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\ \mathrm{d}t \leq f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note : $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3. (a) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(t)\ \mathrm{d}t \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$:
   $$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$
   (c) Établir que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
5. (a) Montrer, pour tout entier $n \geq 2$: $0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$.
   (indication : on pourra commencer par démontrer que $v_n - \ell \leq v_n - u_n$)
   (b) En déduire un programme en **Python** qui calcule et affiche une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Calcul de sommes à vue (sommes usuelles)

Exercice 5 : Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes.

1. $\sum \frac{7}{2^{2n-5}}$
2. $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
3. $\sum \frac{n}{2^n}$
4. $\sum n^2 x^n$
5. $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$
6. $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$
7. $\sum \frac{4n^2+5n}{5^n}$
8. $\sum \frac{n-1}{3^n}$
9. $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$
10. $\sum \frac{3(-2)^n}{n!}$
11. $\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

12. $\sum \dfrac{n+7}{2^n n!}$
13. $\sum \dfrac{n(n-1)x^n}{n!}$
14. $\sum \dfrac{n^2 8^n}{n!}$
15. $\sum \dfrac{(-1)^n}{4^n}$
16. $\sum \dfrac{2^{n+2}}{(n+1)!}$
17. $\sum \dfrac{n(n+3)}{3^{n+2}}$
18. $\sum \dfrac{n^2-n}{(n+3)!}$
19. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(n^2-3n+4)3^n}{n!}$
20. $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{\binom{n}{3}}{n!}$

Calcul de sommes par télescopage

Exercice 6 : Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 7 : Calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{4n^2-1}$ *(voir exercice 1).*

Exercice 8 : On considère la suite (a_n) est définie par : $\begin{cases} a_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} \; = \; \mathrm{e}^{-a_n} \; a_n \end{cases}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.
2. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n.
4. En déduire la nature de $\sum a_n$.

Exercice 9 :*(d'après* `EDHEC 1998 (S)`*)*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

1. (a) Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.
   (b) Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
   (c) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

2. (a) Montrer que (v_n) est strictement négatif.
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$.
   (d) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra que : $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{x^2}{4} \;\leq\; 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \;\leq\; x^2$.

3. (a) En déduire la nature de la série $\sum {u_n}^2$.
   (b) En utilisant le résultat de l'exercice , déterminer la nature de $\sum u_n$.

Calcul de sommes par linéarité

Exercice 10 : On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Séries à termes positifs et critères de convergence des séries

Exercice 11 : Montrer que pour tout $\alpha > 2$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 12 :

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $0 \leq x^2 \leq x$.
2. On considère (x_n) une suite de réels positifs. Montrer que si la série $\sum x_n$ converge, alors la série $\sum x_n^2$ converge.

Exercice 13 : On considère la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

   En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 14 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que les séries $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent.

1. Démontrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ 2\,ab \leq a^2 + b^2$.
2. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que la série $\sum u_n\, v_n$ est (absolument) convergente.

Exercice 15 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{cases}$

1. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.
   (a) Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leq t$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.
   (d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.
3. (a) Montrer, à l'aide de la question 2b, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n\, u_n}$$

   (b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \ell - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$.
   (c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Convergence absolue

Exercice 16 : Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-\pi)^n}{5^n n^2}$
2. $\sum \dfrac{1}{n^4 - 3^n}$
3. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1+(-1)^n n}{n^2}$
4. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^4+n-6}$

Reste d'une série

Exercice 17 : On considère $\sum u_n$ une série convergente. On appelle **reste d'ordre** n de la série $\sum u_n$ et on note R_n la quantité :

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$$

1. Cette quantité est-elle bien définie ?
2. Écrire la quantité R_n en fonction de S (somme de la série $\sum u_n$) et de S_n (somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$).
3. En déduire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Critère des séries alternées

Exercice 18 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geq 0$,
- (u_n) est décroissante,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente. On note S sa somme.
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.
4. Montrer que S vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leq u_{n+1}$. *(on pourra traiter séparément le cas n pair et le cas n impair)*

Application :

5. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$? Donner un majorant de son reste d'indice n.
6. La série précédente est-elle absolument convergente ?

Comparaison série/intégrale

Exercice 19 : On définit la fonction

$$f : \begin{cases} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 2$ on a : $\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.
2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) En utilisant l'inégalité de la question 1, démontrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$$
   (b) On définit la fonction
   $$F : \begin{cases} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \end{cases}$$
   Calculer la dérivée de F. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$
   (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à trois, on a :
   $$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   (b) En déduire que : $\forall n \geq 3,\ I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   (c) Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
4. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit, pour tout entier $n \geq 2$:
   $$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$$
   (a) Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :
   $$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$
   En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Exercice 20 : [Critère de Riemann] Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$.

1. Montrer que la fonction f est décroissante.
2. Montrer que : $\forall k \geq 1,\ f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$.
   Faire apparaître sur une même représentation graphique ces quantités.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :
   $$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$
4. En déduire que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
5. Calculer $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.
6. En conclure que : $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

Suites adjacentes

Exercice 21 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\quad\text{et}\quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$$

1. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.
   (b) En déduire qu'il existe $\gamma\in\mathbb{R}$ et une suite (α_n) de limite nulle tels que :
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\alpha_n$$
   (le réel γ est appelé constante d'Euler)
2. (a) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n\leq\gamma\leq u_n$.
   (b) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |\gamma-u_n|\leq|v_n-u_n|$.
   (c) Écrire un programme **Python** qui affiche une valeur approchée de γ à 10^{-4} près.

Énoncés de concours

Exercice 22 :*(d'après* `EML 2010`*)*
On note $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$f(x)=x-\ln(1+x^2)$$

On donne la valeur approchée : $\ln(2)\approx 0,69$.

1. (a) Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}, f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
   (c) Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}, f''(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

3. (a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (b) Établir que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
   (c) Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n\leq 10^{-3}$.
4. (a) Établir : $\forall x\in[0,1],\ f(x)\leq x-\dfrac{1}{2}x^2$.
   (b) En déduire : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2\ \leq\ 2\ (u_n-u_{n+1})$.
   (c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n^2$ converge.

Exercice 23 :*(d'après* `EDHEC 2003`*)*
On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0=0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0\leq u_n\leq 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. (a) Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier n et renvoie la valeur de u_n.
   (b) Écrire un programme, rédigé en **Python**, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle : $0<1-u_n<10^{-3}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=1-u_n$.

(a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

(b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.

(c) Donner la nature de la série $\sum v_n{}^2$ ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n{}^2$.

Exercice 24 :*(d'après* `ECRICOME 2015`*)* On considère la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = F(u_n)$.

1. Montrer que pour tout réel x : $e^x \geqslant x + 1$.
   Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.
3. Recopier et compléter le programme **Python** suivant afin qu'il représente les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
A = [i for i in range(1,101)]
U = [1]
for k in range(99) :
    ____________________________
plt.plot(A,U,"+")
```

4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
6. À l'aide de la question 1, montrer successivement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1 + u_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$

7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
8. À l'aide de la question 7, établir la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 25 :*(d'après* `EDHEC 2006 voie (S)`*)*

1. (a) Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$$

   (b) Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3.

   (c) Écrire en **Python** une fonction de paramètre n qui calcule le terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. (a) Etablir : $\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} u_n$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

   (c) Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

   (d) En déduire la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

   (e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Montrer : $\forall n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.