Exos de cours

Exercice 1 : Calculer les vecteurs suivants.

1. $(1,3)+(-2,5)$
2. $3\cdot(-2,5)$
3. $2\cdot(1,2)-(-2,7)$
4. $x\cdot(-1,1)+y\cdot(3,4)$
5. $(-1,0,1)+(0,3,-3)$
6. $4\cdot(-2,3,1)$
7. $(-3)\cdot(-4,5,1)+2\cdot(1,2,0)$
8. $x\cdot(-2,0,2)+y\cdot(3,1,0)$

Exercice 2 : Calculer les vecteurs suivants.

1. $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$
2. $4\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
3. $(-2)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$
4. $x\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\-5\end{pmatrix}$
6. $(-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-5\end{pmatrix}$
7. $3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$
8. $x\cdot\begin{pmatrix}-4\\7\\1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}-5\\-1\\-5\end{pmatrix}$

Exercice 3 : Calculer les vecteurs suivants.

1. $\begin{pmatrix}2&2\\1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4\\-2&-4\end{pmatrix}$
2. $4\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\1&-3\end{pmatrix}$
3. $(-2)\cdot\begin{pmatrix}-10&1\\-1&6\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}$
4. $x\cdot\begin{pmatrix}4&3\\-1&-2\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\-4&3\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$
6. $2\cdot\begin{pmatrix}2&1&3\\-2&4&-1\\-5&7&-3\end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix}1&-4&5\\2&8&-1\\3&2&1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-3&-8&2\\2&1&1\\-1&-1&4\end{pmatrix}$
8. $x\cdot\begin{pmatrix}-4&0&1\\7&-3&0\\0&-2&2\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}0&5&6\\-1&0&2\\-5&1&0\end{pmatrix}$

Exercice 4 : Calculer les vecteurs suivants.

1. $(X+2)+(X+3)$
2. $3\cdot(-X+4)$
3. $2\cdot(X+1)-(2X+10)$
4. $a\cdot(-2X+3)+b\cdot(X-5)$
5. $(X^2+2X+1)+(3X^2-X-1)$
6. $3\cdot(2X^2-3X+4)$
7. $2\cdot(-X^2-2X+2)-(X^2-4X+5)$
8. $a\cdot(3X^2-X+2)+b\cdot(X-4)$
9. $(-X^3+X^2-X+1)+(X^3+X^2+X+1)$
10. $(-1)\cdot(-2X^3+3X^2-X+1)$
11. $(-3)\cdot(X^3+1)+2\cdot(X^2+3X+4)$
12. $a\cdot(4X^3+2X+3)+b\cdot(-2X^3-X^2+3)$

Exercice 5 : Démontrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$ (espace des matrices carrées symétriques d'ordre n)
2. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$ (espace des matrices carrées antisymétriques d'ordre n) *(EDHEC 2020)*
3. $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (commutant de A)
4. $F = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$, où $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
5. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$
6. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$
7. $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = 0\right\}$
8. $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$
9. $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\right\}$

Exercice 6 : Pour chaque ensemble ci-dessous, déterminer s'il s'agit ou non d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$.
2. $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3 = 0\right\}$.
3. $F_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$.
4. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \,\text{et}\, y = 5z\right\}$.
5. $F_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\right\}$.
6. $F_6 = \left\{(2x+y, y-2, 1+x-y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
7. $F_7 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x = y + z - t\right\}$.
8. $F_8 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 0\right\}$.

Exercice 7 : Soit $F = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\right\}$. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 8 : Les familles $\mathcal{F}_k$ suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathcal{F}_1 = ((1,2),(1,-1))$
2. $\mathcal{F}_2 = ((1,4))$
3. $\mathcal{F}_3 = ((0,0))$
4. $\mathcal{F}_4 = ((1,-2),(2,3),(1,0))$
5. $\mathcal{F}_5 = ((2,3),(-4,-6))$
6. $\mathcal{F}_6 = ((3,-1),(-1,4))$

Exercice 9 : Montrer que $(1, 2X+1, X^2-3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10 : Trouver une base de l'ensemble $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\right\}$.

Exercice 11 : Montrer que $((1,1),(2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Quels sont les coordonnées du vecteur $(3,4)$ dans cette base ?

Exercice 12 : Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(X) = (X-2)^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 13 : On considère les ensembles

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-X) = -P(X)\} \qquad G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-X) = P(X)\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner une base de chacun d'eux.
3. Donner leur dimension.

Exercice 14 : Déterminer le rang des familles suivantes.

1. $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
2. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
3. $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$
4. $\mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$
5. $\mathcal{G}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$
6. $\mathcal{G}_3 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$
7. $\mathcal{H}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
8. $\mathcal{H}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\2\end{pmatrix}\right)$

Exercice 15 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\1 & -1 & 2\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 5\\-1 & -3 & -7\end{pmatrix}$

Sous-espaces vectoriels

Exercice 16 : Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 1\}$.
2. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(2)\}$.

Exercice 17 : Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. $A = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2c\right\}$
2. $B = \left\{\begin{pmatrix}x & 2x-y\\y & x+2y\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
3. $C = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 1\right\}$
4. $D = \left\{\begin{pmatrix}x & x\\2x-y & x-2y\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 18 :[Limite programme / oral HEC] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\right\}$.
2. $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\right\}$.
3. $E = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)\right\}$.
4. L'ensemble des polynômes réels ayant comme uniques racines 0 et 1.
5. L'ensemble des polynômes réels dont le degré est compris entre 3 et 5.
6. $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2\right\}$.
7. $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 1\right\}$.
8. L'ensemble des suites réelles à termes positifs.
9. L'ensemble des suites réelles bornées.
10. L'ensemble $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille n.

Familles génératrices, familles libres, bases, coordonnées

Exercice 19 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que $((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,3),(1,0,3,3))$ en est une base.
2. Quelles sont les coordonnées de $(1,0,0,-1)$ dans cette base ?

Exercice 20 : On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (-1, 1, -1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}$.
   En déduire les coordonnées de (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 21 : Donner une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions (x, y, z, t) du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & t & & & = & 0 \\ x & - & 3y & & & + & 9z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & - & t & + & 18z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 22 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. (a) Montrer que $(1, 1 + X, (1 + X)^2, (1 + X)^3)$ est une base de E.
   (b) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?
2. (a) Montrer que $((X - 1)(X - 2)(X - 3), X(X - 2)(X - 3), X(X - 1)(X - 3), X(X - 1)(X - 2))$ est aussi une base de E.
   (b) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

Exercice 23 : On considère les polynômes :

$$P(X) = X,\ Q(X) = X - 1 \text{ et } R(X) = (X - 1)(X - 2)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P, Q, R)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soient a, b, c trois réels. Déterminer, à l'aide de la base $\mathcal{B}$, un polynôme $T \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$T(1) = a,\ T(2) = b,\ T(3) = c$$

Exercice 24 : On considère les polynômes :

$$P_1(X) = 1 + X + X^2,\ P_2(X) = X + X^2 \text{ et } P_3(X) = X^2$$

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $P(X)$ dans la base (P_1, P_2, P_3).

Exercice 25 :

1. Montrer que $\left(1, (X - 1), (X - 1)^2, (X - 1)^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de X^3 dans cette base.
3. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer les coordonnées de $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$ dans cette base.

Exercice 26 : Pour chaque famille A_k suivante, déterminer si elle est libre, le rang de la famille puis si c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. $A_1 = (P_1, P_2, P_3)$ où les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont définis par :
   - $P_1(X) = -1 + 3X + X^2$
   - $P_2(X) = 4 - 2X + 3X^2$
   - $P_3(X) = 4 - 3X - 2X^2$
2. $A_2 = (P_1, P_2, P_3)$ où les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont définis par :
   - $P_1(X) = -5 + 2X$
   - $P_2(X) = 6 - X^2$
   - $P_3(X) = 27 - 6X - 2X^2$

Exercice 27 : On se place dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère les matrices colonne

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   En déduire les coordonnées de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 28 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \; M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. La famille (M_1, M_2, M_3) est-elle libre ?
2. La famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est-elle libre ?

Espace vectoriel de dimension finie

Exercice 29 : Déterminer une base et la dimension des sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :
1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$.

Exercice 30 : On définit les trois matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}\,(A, B, C)$.

Exercice 31 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels. Si oui, en donner une base et la dimension.
1. L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.
2. L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MB$.
3. L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = B$.
4. L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AM = M$.

Exercice 32 : On considère E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une famille libre de E. En déduire la dimension de E.

Exercice 33 : On considère $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ a-b & b & a \\ 2a & 2b & 2a-b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer la dimension de $\mathcal{E}$.

Exercice 34 : On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On considère les vecteurs de E :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_4 \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où m désigne un paramètre réel.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (X_1, X_2, X_3, X_4) est une famille génératrice de E.
2. Lorsque $\operatorname{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) \neq E$, déterminer sa dimension.
3. Lorsque $m = -3$, déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ extraite de la famille (X_1, X_2, X_3, X_4). Compléter la base $\mathcal{B}$ en une base de E.
4. Lorsque $m = 1$, déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ extraite de la famille (X_1, X_2, X_3, X_4). Compléter la base $\mathcal{B}$ en une base de E.

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 35 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = (1, 3, -1), \quad v = (2, 0, 1), \quad w = (a, 2 - a, 2a - 1)$$

Déterminer le rang de la famille (u, v, w) en fonction de a. Pour quelles valeurs de a la famille est-elle libre ?

Rang d'une matrice

Exercice 36 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 8 \\ 3 & -7 & 29 \end{pmatrix}$
5. $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
7. $B_4 = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
8. $B_5 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
9. $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$
11. $C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
12. $D_3 = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -6 & 4 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \\ -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 37 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang des matrices suivantes en fonction de a :

1. $M_1 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2a + 1 & 3 & a + 2 \end{pmatrix}$
2. $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$
3. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \\ a + 1 & a^2 \end{pmatrix}$