TP2 : Calcul du premier entier tel qu'une condition est vérifiée

(Révisions sur la structure itérative `while`*)*

I. Introduction du problème

Le problème qui nous intéresse ici est le suivant.

Problème.

<u>Données</u> :

- Une suite (u_n) et une suite (d_n) telle que $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- L'existence d'un réel α tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant d_n$.

<u>But</u> :

1) Déterminer un indice N tel que le terme u_N vérifie : $|u_N - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

2) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Remarque

- Les inégalités du type $|u_n - \alpha| \leqslant d_n$ sont fréquentes dans les exercices. On pense notamment à l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis pour l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- La valeur de α n'est pas forcément connue précisément. C'est par exemple le cas lorsque α est fourni par le théorème de la bijection : on sait alors dans quel intervalle se situe α mais on ne connaît pas sa valeur exacte.
- Comme $|u_n - \alpha| \leqslant d_n$ et $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en conclut, à l'aide du théorème d'encadrement, que $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que (u_n) est convergente, de limite α. Ceci démontre que l'élément N du point ***1)*** existe bien et que l'inégalité $|u_N - \alpha| \leqslant 10^{-4}$ est vérifiée à partir d'un certain rang.
- L'idée de base pour déterminer N est de calculer successivement les termes de (u_n) jusqu'à celui qui vérifie $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$. Cependant, on ne peut procéder de la sorte si la valeur de α n'est pas connue (calcul de $u_n - \alpha$ impossible). On se sert alors de la suite (d_n).
  Il suffit en effet de déterminer un entier N tel que $d_N \leqslant 10^{-4}$. On obtient alors, par transitivité :
  $$|u_N - \alpha| \ \leqslant\ d_n \ \leqslant\ 10^{-4}$$
  ce qui permet de résoudre le problème.
- Pour l'entier N précédent déterminé, u_N est une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

II. Un exemple classique

On commence par illustrer le problème et sa résolution par l'étude d'une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$ dans le cadre de l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et on définit la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

Rappelons les différentes étapes de ce type d'étude. Les démonstrations sont laissées en exo.

1) En appliquant le théorème de la bijection à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, on démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, que l'on note α.

2) Après avoir démontré que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f, on en déduit, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$.

3) ***a)*** Par étude de la fonction f', on démontre : $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

b) On est alors dans le cadre de l'application de l'IAF, qui permet de démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\, |u_n - \alpha|$$

(on démontre en fait que $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}\, |u_n - \alpha|$)

c) On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n$.

d) Comme $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que (u_n) est convergente, de limite α.

Le but est alors de calculer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

► Quelle condition permet d'assurer que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$?

► Écrire un script utilisant une boucle while et permettant d'afficher le premier entier n tel que $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n \leqslant 10^{-4}$ en les testant tous à partir de 0.

- Compléter le programme précédent afin qu'il affiche également une valeur approchée à 10^{-4} près de α.

- Déterminer une formule mathématique donnant le premier entier n tel que $\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n \leqslant 10^{-4}$.

- Comparer la valeur obtenue dans la question précédente et celle affichée par le programme.

- Soit $\varepsilon > 0$. Donner la formule permettant d'obtenir le premier entier n tel que $\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n \leqslant \varepsilon$.

- En déduire une fonction `calcApproch` qui prend en paramètre un réel strictement positif `eps` et qui calcule une valeur approchée de α à `eps` près à l'aide d'une boucle `for`.

III. Les exemples aux concours

Il est fréquent de devoir coder des programmes permettant de calculer un entier n / le premier entier n tel qu'une condition est vérifiée. On retrouve ce type d'exercice sous de nombreuses variantes.

III.1. EDHEC 2016

Dans l'épreuve `EDHEC 2016`, on considérait une suite (u_n) définie implicitement (u_n unique élément de l'intervalle $[n, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 1$). Avant la question **Python**, il était demandé de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

- *Utiliser la question précédente pour compléter les commandes* ***Python*** *suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier* n *pour lequel* $u_n - n$ *est inférieur ou égal à* 10^{-4}.

```
import numpy as np
n = 0
while ----
    n = ----
print(n)
```

- *Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs* $n = 55$, $n = 70$ *et* $n = 85$. *Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de* $\ln(10)$.

Remarque

- À première vue, on s'écarte un peu du cadre annoncé en introduction. Ce n'est pas le cas. Il suffit pour s'en convaincre de poser $v_n = u_n - n$, $\alpha = 0$ et $d_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.
  On retombe alors (comme $v_n \geqslant 0$) sur l'inégalité : $|v_n - \alpha| \leqslant d_n$.
- En pratique, cette question n'a pas d'intérêt algorithmique fort puisque, comme on le démontre dans la question qui suit, il est simple d'obtenir la valeur n recherchée par une étude mathématique.

On répondra **toujours** aux questions **Python** de l'**EDHEC**. Deux bonnes raisons à cela :
- × elles sont abordables.
- × les instructions **Python** à utiliser sont généralement rappelées dans l'énoncé.

Ce sont donc des points qu'il faut s'obliger à prendre.

III.2. EML 2016

Une partie de l'épreuve `EML 2016` consistait en l'étude d'une suite (u_n) récurrente définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right. \quad \text{où} \quad f : t \mapsto \left\{\begin{array}{cl} t^2 - t\ \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{array}\right.$$

On devait démontrer les propriétés suivantes.

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ *(par récurrence !)*.
- La suite (u_n) est croissante *(par récurrence on démontre : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$)*.
- La suite (u_n) est convergente de limite 1 *(1 est l'unique solution de l'équation $f(\ell) = \ell$)*.

► *Écrire un script **Python** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $|1 - u_N| < 10^{-4}$.*

Remarque

- On peut s'interroger sur l'intérêt pratique de cette question. En effet, la suite (u_n) est définie de manière explicite. On connaît aussi la valeur de α ($\alpha = 1$).
- Concédons que le N fournit permet d'avoir une idée sur la vitesse de convergence de u_n vers 1.
- Au-delà de l'intérêt pratique, c'est surtout la manipulation de **Python** qui est testée : savoir écrire une boucle `while`, savoir calculer les termes d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- C'est un type de questions qui est facile à caser dans un sujet et qui peut donc permettre d'assurer la présence d'au moins une question **Python** dans un sujet (en l'occurrence, l'épreuve **EML 2016** ne comportait que cette question **Python** ...).

III.3. EML 2017

L'épreuve `EML 2017` comportait une étude de suite récurrente (u_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right. \qquad \text{où} \qquad f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ \ln(x)$$

On devait démontrer les propriétés suivantes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$ *(par récurrence !)*.
- Étudier les variations puis le signe de la fonction $g : \left| \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array} \right.$.
- En déduire que la suite (u_n) est croissante *(de manière directe puisque $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \geqslant 2$ et donc notamment pour $x = u_n \geqslant 2$)*.
- Démontrer que la suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite *(on démontre par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée : si elle était majorée, elle serait convergente vers l'un des zéros de la fonction g …)*.

La question **Python** de cet exercice consistait (une nouvelle fois, quelle surprise !) à déterminer un entier N telle qu'une condition est vérifiée.

► Écrire une fonction en **Python** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

III.4. EML 2018

L'épreuve `EML 2018` comportait une étude de suite récurrente (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2 \end{array}\right.$$

On devait démontrer les propriétés suivantes.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\ (u_n - b)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

▸ Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n):` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

▸ Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 0
3     while ...........
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

Commentaire

III.5. ECRICOME 2018

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

On démontrait dans cet exercice que la suite (u_n) était convergente, vers une limite notée $\gamma \in \mathbb{R}$ puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{n}$$

- On rappelle que l'instruction `np.floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction **Python**, nommée `u`, de la question ***1.e)*** a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
import numpy as np
eps = float(input('Entrer un réel strictement positif : '))
n = int(np.floor(1/eps)) + 1
print(u(n))
```