Interrogation de rentrée

Pour réussir en Mathématiques, il faut...

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. *Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.*

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. » :

a) La variable x est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable f est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :
« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »
Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

2. Une variable muette est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** parfois libre, parfois liée ***D.*** la réponse D

3. L'expression $\displaystyle\int_0^y \ln(1+2t^2)\mathrm{d}t$ dépend de

A. y ***B.*** t ***C.*** y et t ***D.*** ni y, ni t

4. Dans l'écriture : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \leqslant K$,

a) La variable n_0 est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable n est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable K est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

5. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = ay - z\}$,

a) La variable x est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable y est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable z est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

d) La variable a est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

6. L'expression $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i+j)^2$ dépend de

A. n ***B.*** i ***C.*** j ***D.*** ni n, ni i, ni j

7. Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable X est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable k est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

A. dépend toujours de n ***B.*** ne dépend jamais de n ***C.*** peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $f(x) = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$,

a) La variable x est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable f est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

10. Une variable liée

A. doit toujours ***B.*** ne doit jamais ***C.*** peut parfois

être introduite par un « Soit ».

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
$\displaystyle\int_0^1 (x+y)\,dx$		
$f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$		
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$		
$\exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \pi < k+1$		
$\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$		
u_n		
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$		
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$		

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} -2x+2y-3z=0 \\ -4x+2y+\ \ z=0 \\ \ \ 4x+4y-3z=0 \end{cases}$.

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\begin{cases} \ \ x+\ \ y+3z=0 \\ -3x-3y+2z=0 \\ \ \ 4x+4y-2z=0 \end{cases}$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

Exercice 4 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} k^2$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$. Calculer $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 6
Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \; = \; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

3. Conclure.

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 7

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire une fonction **Python**, nommée `f`, qui prend en argument un réel x et qui renvoie $f(x)$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python**, nommée `suiteU`, qui prend en argument un entier n et qui renvoie u_n.

3. On **admet** que la suite (u_n) converge vers 0. Écrire une fonction **Python**, nommée `premTerme`, qui prend en argument un réel $\varepsilon > 0$ (que l'on notera `eps` en **Python**) et qui renvoie le premier entier n vérifiant : $u_n \leqslant \varepsilon$.

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 8
Soit

$$f \quad : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(1+x) \end{array} \right.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *a)* Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Étudier les variations de f', puis celles de f.

c) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0,+\infty[$.

d) Tracer, dans un même repère orthonormé, la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

2. On suppose dans cette question : $u_0 > \mathrm{e} - 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} - 1 < u_n \leqslant u_{n+1}$.

b) En déduire que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. On suppose dans cette question : $0 < u_0 < \mathrm{e} - 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n < \mathrm{e} - 1$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ puis que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$.

(On souhaite dans la suite de cette question préciser la vitesse de convergence vers 0*)*

c) On pose $K = \ln(1 + u_0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant K u_n$.

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant K^n u_0$.

e) Vérifier que $0 < K < 1$ puis retrouver la limite de la suite (u_n).

4. Que se passe-t-il lorsque $u_0 = \mathrm{e} - 1$?

5. (*) *Informatique.* Expliquer ce que réalise le script **Python** suivant :

```python
def f(x):
    return x * np.log(1+x)

x = np.arange(0.01, 3, 0.1)
plt.plot(x, f(x))

x = [0, 3]
plt.plot(x, x)

u = np.e - 1.1
x = [u]
y = [0]
for k in range(1, 11):
    z = f(u)
    x.append(u)
    x.append(z)
    y.append(z)
    y.append(z)
    u = z
plt.plot(x, y)
plt.grid()
plt.show()
```