Interrogation de rentrée (barème)

Pour réussir en Mathématiques, il faut...

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. *Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.*

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. » :

a) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable f est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :
« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »
Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

2. Une variable muette est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** parfois libre, parfois liée ***D.*** la réponse D

3. L'expression $\displaystyle\int_0^y \ln(1 + 2t^2)\mathrm{d}t$ dépend de

A. $\boxed{y}$ ***B.*** t ***C.*** y et t ***D.*** ni y, ni t

4. Dans l'écriture : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \leqslant K$,

a) La variable n_0 est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable n est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable K est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

5. Dans l'écriture $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = ay - z\}$,

a) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable y est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable z est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

d) La variable a est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

6. L'expression $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i+j)^2$ dépend de

A. $\boxed{n}$ ***B.*** i ***C.*** j ***D.*** ni n, ni i, ni j

7. Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable X est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable k est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

A. dépend toujours de n ***B.*** $\boxed{\text{ne dépend jamais de } n}$ ***C.*** peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $f(x) = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$,

a) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable f est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

10. Une variable liée

A. doit toujours ***B.*** $\boxed{\text{ne doit jamais}}$ ***C.*** peut parfois

être introduite par un « Soit ».

- **10 pts : on attribue 1 pt par réponse juste, pas de point négatif en cas de question fausse. Bonification de 1 pt si tout est juste. A la fin, division par 2 du total.**

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
$\displaystyle\int_0^1 (x+y)\ dx$	Objet	Réel
$f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$	Objet	Fonction
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$	Objet	Ensemble
$\exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \pi < k+1$	Proposition	
$\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} u_n$	Objet	Suite (série)
u_n	Objet	Réel
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Objet	Suite
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$	Proposition	

- **7 pts : on attribue 1 pt par réponse juste, pas de point négatif en cas de question fausse. A la fin, division par 2 du total.**

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} -2x+2y-3z=0 \\ -4x+2y+\ \ z=0 \\ \ \ 4x+4y-3z=0 \end{array}\right.$.

- **1 pt : pivot de Gauss bien effectué et expliqué**
- **1 pt : raisonnement par équivalence**
- **1 pt : résultat** $x=y=z=0$
  Aucun point si pas d'explication

2. a) Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} \ \ \ x+\ \ y+3z=0 \\ -3x-3y+2z=0 \\ \ \ 4x+4y-2z=0 \end{array}\right.$.

- **1 pt : pivot de Gauss bien effectué et expliqué**

- **1 pt : raisonnement par équivalence**
- **1 pt : résultat** $\begin{cases} x & = -y \\ & z = 0 \end{cases}$

  Aucun point si pas d'explication

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

- **1 pt :** $X \in E_2(A) \iff \begin{cases} x & = -y \\ & z = 0 \end{cases}$
- **2 pt :** $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 4
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{2n+1} k^2$.

- **1 pt :** $\sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$
- **2 pt :** $\sum_{k=0}^{2n+1} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)(4n+3)}{3}$ **(0 pt si pas simplifié)**

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$. Calculer $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

- **1 pt :** $2X$ **est finie donc admet une espérance (et une variance)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(2X) = \frac{n}{2}$
- **1 pt : argument de linéarité cité**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(2X) = \frac{3n}{4}$

malus de 1 pt en cas de non-simplification des résultats

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 6
Soit $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

- **1 pt : incompatibilité des événements de l'union considérée**
- **1 pt : argument de somme géométrique correct**

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

- **1 pt : X est à valeurs entières**
- **1 pt : incompatibilité des événements**

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

- **1 pt : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$**
- **2 pt : $\mathbb{P}([X = k]) = q^{k-1}p$**

3. Conclure.

- **2 pt : écriture correcte de l'équivalence démontrée**

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 7

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire une fonction **Python**, nommée `f`, qui prend en argument un réel x et qui renvoie $f(x)$.

- **2 pts : 1 pt par ligne correcte**

Démonstration.

```
def f(x):
    return np.log(1 + x**2)
```

□

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python**, nommée `suiteU`, qui prend en argument un entier n et qui renvoie u_n.

- **1 pt :** `u = 1`
- **1 pt : boucle for correcte (bonne taille)**
- **1 pt :** `u = f(u)`
- **1 pt : bonus si tout est correct**

Démonstration.

```
def suiteU(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

□

3. On **admet** que la suite (u_n) converge vers 0. Écrire une fonction **Python**, nommée `premTerme`, qui prend en argument un réel $\varepsilon > 0$ (que l'on notera `eps` en **Python**) et qui renvoie le premier entier n vérifiant : $u_n \leqslant \varepsilon$.

- **1 pt :** `n = 0` **et** $\mathbf{u = 1}$
- **1 pt : boucle while (condition d'arrêt correcte)**
- **1 pt :** `n += 1` **ou** `n = n + 1`
- **1 pt :** `u = f(u)`
- **1 pt : bonus si tout est correct**

Démonstration.

```
def premTerme(eps):
    n = 0
    u = 1
    while u > eps:
        n += 1
        u = f(u)
    return n
```

□

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 8
Soit

$$f \ : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(1+x) \end{array} \right.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

- **2 pts :** f **est de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** $[0,+\infty[$
- **1 pt :** $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$
- **1 pt :** $f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$

b) Étudier les variations de f', puis celles de f.

- **1 pt :**

x	0 $+\infty$
Signe de $f''(x)$	$+$
Variations de f'	$0 \nearrow +\infty$

- **1 pt :**

x	0 $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow +\infty$

c) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.

- **2 pts :** $f(x) = x \iff x = 0 \quad \texttt{OU} \quad x = \mathbf{e} - 1$

d) Tracer, dans un même repère orthonormé, la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

- **1 pt : tangente en** 0
- **1 pt : indication du point d'abscisse** $\mathbf{e} - 1$
- **1 pt : allure générale de la courbe**

2. On suppose dans cette question : $u_0 > \mathrm{e} - 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} - 1 < u_n \leqslant u_{n+1}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) En déduire que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : limites expliquées**
- **1 pt : unicité de la limite**
- **1 pt : contradiction**

3. On suppose dans cette question : $0 < u_0 < \mathrm{e} - 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n < \mathrm{e} - 1$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ puis que $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n^2$.

- **1 pt : thm de convergence monotone**
- **2 pts :** $\ell = 0$ **ou** $\ell = \mathbf{e} - 1$
- **1 pt :** $\ell = \mathbf{e} - 1$ **est impossible**
- **1 pt :** $\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$

(On souhaite dans la suite de cette question préciser la vitesse de convergence vers 0*)*

c) On pose $K = \ln(1 + u_0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant K u_n$.

- **1 pt :** (u_n) **est décroissante**
- **1 pt : croissance de** $\ln$
- **1 pt : multiplication par** $u_n > 0$ **(pas de point si le signe n'est pas explicite)**

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant K^n u_0$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

e) Vérifier que $0 < K < 1$ puis retrouver la limite de la suite (u_n).

- **1 pt : croissance stricte de** $\ln$

- **1 pt : thm d'encadrement**

4. Que se passe-t-il lorsque $u_0 = \mathrm{e} - 1$?

- **1 pt : la suite (u_n) est constante**

5. (*) *Informatique.* Expliquer ce que réalise le script **Python** suivant :

```
def f(x):
    return x * np.log(1+x)

x = np.arange(0.01, 3, 0.1)
plt.plot(x, f(x))

x = [0, 3]
plt.plot(x, x)

u = np.e - 1.1
x = [u]
y = [0]
for k in range(1, 11):
    z = f(u)
    x.append(u)
    x.append(z)
    y.append(z)
    y.append(z)
    u = z
plt.plot(x, y)
plt.grid()
plt.show()
```

- **1 pt : le script trace le graphe de f au dessus du segment $[0, 3]$**
- **1 pt : le script trace la droite d'équation $y = x$**
- **1 pt : le script construit les 10 premiers termes de la suite (u_n) lorsque $u_0 = \mathrm{e} - 1, 1$.**
- **1 pt : explications intéressantes**