# Interrogation de rentrée (correction)

## Pour réussir en Mathématiques, il faut...

## I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

**Exercice 1.** *Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.*

*1.* Dans la phrase « On note $f$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. » :

*a)* La variable $x$ est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

*b)* La variable $f$ est

***A.*** $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

*c)* Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :
« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »
Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } ]0, +\infty[.}$$

*2.* Une variable muette est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** parfois libre, parfois liée ***D.*** la réponse D

*3.* L'expression $\displaystyle\int_0^y \ln(1+2t^2)\mathrm{d}t$ dépend de

***A.*** $\boxed{y}$ ***B.*** $t$ ***C.*** $y$ et $t$ ***D.*** ni $y$, ni $t$

*4.* Dans l'écriture : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \leqslant K$,

*a)* La variable $n_0$ est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

*b)* La variable $n$ est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

*c)* La variable $K$ est

***A.*** $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***5.*** Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = ay - z\}$,

***a)*** La variable $x$ est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***b)*** La variable $y$ est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***c)*** La variable $z$ est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***d)*** La variable $a$ est

***A.*** $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***6.*** L'expression $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i+j)^2$ dépend de

***A.*** $\boxed{n}$ ***B.*** $i$ ***C.*** $j$ ***D.*** ni $n$, ni $i$, ni $j$

***7.*** Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

***a)*** La variable $X$ est

***A.*** $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***b)*** La variable $k$ est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***8.*** Soit $(u_n)$ une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

***A.*** dépend toujours de $n$ ***B.*** $\boxed{\text{ne dépend jamais de } n}$ ***C.*** peut dépendre de $n$

***9.*** Dans l'écriture : $f(x) = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$,

***a)*** La variable $x$ est

***A.*** libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***b)*** La variable $f$ est

***A.*** $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

***10.*** Une variable liée

***A.*** doit toujours ***B.*** $\boxed{\text{ne doit jamais}}$ ***C.*** peut parfois

être introduite par un « Soit ».

**Exercice 2**
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
*Aucune justification n'est attendue pour ces questions.*

| Expression | Objet / Proposition | Type d'objet |
|---|---|---|
| $\displaystyle\int_0^1 (x+y)\ dx$ | Objet | Réel |
| $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ | Objet | Fonction |
| $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$ | Objet | Ensemble |
| $\exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \pi < k+1$ | Proposition | |
| $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} u_n$ | Objet | Suite (série) |
| $u_n$ | Objet | Réel |
| $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Objet | Suite |
| $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$ | Proposition | |

## II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

**Exercice 3**

***1.*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} -2x+2y-3z=0 \\ -4x+2y+\ \ z=0 \\ \ \ 4x+4y-3z=0 \end{array}\right.$.

*Démonstration.*

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+2y-3z=0 \\ -4x+2y+\ \ z=0 \\ \ \ 4x+4y-3z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} -2x+2y-3z=0 \\ -2y+7z=0 \\ 8y-9z=0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} -2x+2y-\ \ 3z=0 \\ -2y+\ \ 7z=0 \\ 19z=0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3+4L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right. \qquad \text{(par remontées successives)}$$

$\square$

***2.*** ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x + \phantom{3}y + 3z &=& 0 \\ -3x - 3y + 2z &=& 0 \\ 4x + 4y - 2z &=& 0 \end{array}\right.$.

*Démonstration.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + \phantom{3}y + 3z &=& 0 \\ -3x - 3y + 2z &=& 0 \\ 4x + 4y - 2z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + y + \phantom{1}3z &=& 0 \\ 11z &=& 0 \\ -\ 14z &=& 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

$\square$

***b)*** On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

*Démonstration.* Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \iff & AX = 2X \\ & \iff & (A - 2I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x + \phantom{3}y + 3z &=& 0 \\ -3x - 3y + 2z &=& 0 \\ 4x + 4y - 2z &=& 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y \\ z &=& 0 \end{array}\right. \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) &=& \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y, z = 0 \right\} \\ &=& \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ &=& \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y, z = 0 \right\} \\ &=& \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$\square$

**Exercice 4**
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} k^2$.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n+1} k^2 &= \frac{(2n+1)(2n+2)(2(2n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)(4n+3)}{3}\end{aligned}$$

□

**Exercice 5** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire $X$ qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$. Calculer $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

*Démonstration.* $X$ est finie donc $2X$ est finie. A ce titre, $2X$ admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(2X) &= 2\mathbb{E}(X) && \textit{(par linéarité)} \\ &= 2n\frac{1}{4} \\ &= \frac{n}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(2X) &= 4\mathbb{V}(X) && \textit{(par propriété de la variance)} \\ &= 4n\frac{1}{4}\frac{3}{4} \\ &= \frac{3n}{4}\end{aligned}$$

□

## III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

**Exercice 6**
Soit $p \in ]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

*1.* Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

*Démonstration.*
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[X > k]}\right) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

- Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ : $[X \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left( \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i] \right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = i]) & \textit{(par incompatibilité de } [X=1], \ldots, [X=i]\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p \, q^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i & \\ & = & p \, \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - q^k & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \ = \ 1 - (1 - q^k) \ = \ q^k.}$$

$\square$

***2.*** Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

***a)*** Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

*Démonstration.*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} [X > k-1] & = & [X \geqslant k] & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & [X = k] \cup [X > k] & \end{array}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]).}$$

$\square$

***b)*** Démontrer que la variable aléatoire $X$ suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = k]) & = & \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & q^{k-1} - q^k & \textit{(par hypothèse de la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1} p & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

$\square$

***3.*** Conclure.

*Démonstration.*

- D'après la question ***1.a)*** : $\quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

- D'après la question ***1.b)*** : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si $X$ est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \left( \ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k \ \right)}$$

$\square$

# IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

**Exercice 7**

***1.*** On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire une fonction **Python**, nommée `f`, qui prend en argument un réel $x$ et qui renvoie $f(x)$.

*Démonstration.*

```
def f(x):
    return np.log(1 + x**2)
```

$\square$

***2.*** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python**, nommée `suiteU`, qui prend en argument un entier $n$ et qui renvoie $u_n$.

*Démonstration.*

```
def suiteU(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

$\square$

***3.*** On **admet** que la suite $(u_n)$ converge vers 0. Écrire une fonction **Python**, nommée `premTerme`, qui prend en argument un réel $\varepsilon > 0$ (que l'on notera `eps` en **Python**) et qui renvoie le premier entier $n$ vérifiant : $u_n \leqslant \varepsilon$.

*Démonstration.*

```
def premTerme(eps):
    n = 0
    u = 1
    while u > eps:
        n += 1
        u = f(u)
    return n
```

$\square$

# V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

**Exercice 8**
Soit

$$f \ : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(1+x) \end{array} \right.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in ]0,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

***1. a)*** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

*Démonstration.* La fonction $f$ est de la forme $f = f_1 \times f_2$ où

- $f_1 : x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ car polynomiale
- $f_2 : x \mapsto \ln(1+x)$ est de la forme $f_2 = \ln \circ h$ où
  - × ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$
  - × $h : x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et $h([0,+\infty[) = [1,+\infty[ \subset ]0,+\infty[$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est bien de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

et

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2}$$

□

***b)*** Étudier les variations de $f'$, puis celles de $f$.

*Démonstration.* Pour tout $x \geqslant 0$ : $f''(x) > 0$. On en déduit que $f'$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. D'où le tableau de variations de $f'$ (la limite en $+\infty$ s'obtenant sans difficulté) :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $f''(x)$ | $+$ |
| Variations de $f'$ | $0 \nearrow +\infty$ |

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$. On en déduit que $f$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. D'où le tableau de variations de $f$ (la limite en $+\infty$ s'obtenant sans difficulté) :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $+$ |
| Variations de $f$ | $0 \nearrow +\infty$ |

□

***c)*** Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.

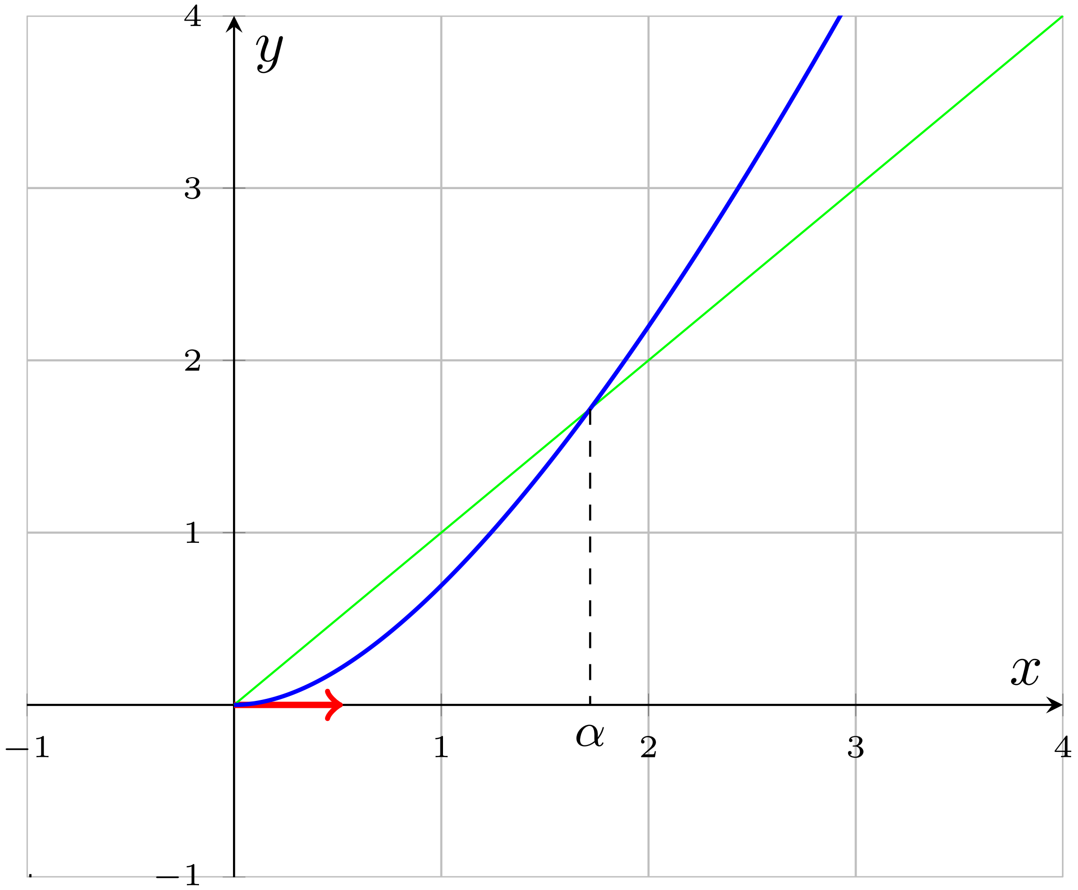
*Démonstration.* Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x\ln(1+x) = x \\ &\iff x\ln(1+x) - x = 0 \\ &\iff x\,(\ln(1+x) - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \texttt{OU} \quad \ln(1+x) - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \texttt{OU} \quad \ln(1+x) = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \texttt{OU} \quad 1 + x = \mathrm{e} \\ &\iff x = 0 \quad \texttt{OU} \quad x = \mathrm{e} - 1 \end{aligned}$$

□

***d)*** Tracer, dans un même repère orthonormé, la courbe représentative de $f$ et la droite d'équation $y = x$.

*Démonstration.*
On pose $\alpha = \mathrm{e} - 1$.




□

***2.*** On suppose dans cette question : $u_0 > \mathrm{e} - 1$.

***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} - 1 < u_n \leqslant u_{n+1}$.

*Démonstration.* Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$ : « $\mathrm{e} - 1 < u_n \leqslant u_{n+1}$ »
<u>Initialisation</u> :
Par hypothèse : $u_0 > \mathrm{e} - 1$. Or, $u_1 = u_0 \ln(1 + u_0)$ et $\ln(1 + u_0) \geqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$ par croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant par $u_0 > 0$, on obtient $u_1 \geqslant u_0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence : $\mathrm{e} - 1 < u_n \leqslant u_{n+1}$. Or, $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $f(\mathrm{e} - 1) < f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, *i.e.* $\mathrm{e} - 1 < u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a ainsi montré par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e} - 1 < u_n \leqslant u_{n+1}.}$$

□

***b)*** En déduire que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

*Démonstration.* D'après la question précédente, la suite $(u_n)$ est croissante. Il n'y a alors que deux possibilités : soit $(u_n)$ converge, soit $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Supposons que $(u_n)$ converge et notons $\ell \in [u_0, +\infty[$ sa limite.
Remarquons que :

- $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ par argument de suite extraite
- $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ par continuité de $f$ sur $[\mathrm{e} - 1, +\infty[$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, par unicité de la limite : $\ell = f(\ell)$.
D'après la question ***1.c)***, $\ell = 0$ ou $\ell = \mathrm{e} - 1$. C'est absurde puisque $\ell \geqslant u_0 > \mathrm{e} - 1 > 0$.
Donc

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

□

***3.*** On suppose dans cette question : $0 < u_0 < \mathrm{e} - 1$.

***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n < \mathrm{e} - 1$.

*Démonstration.* Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$ : « $0 < u_{n+1} \leqslant u_n < \mathrm{e} - 1$ »
<u>Initialisation</u> :
Par hypothèse : $u_0 > 0$. Par stricte croissance de $f$ sur $[0, +\infty[$, $u_1 = f(u_0) > f(0) = 0$.
De plus, $u_1 = u_0 \ln(1 + u_0)$ et $\ln(1 + u_0) \leqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$ par croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant par $u_0 > 0$, on obtient $u_1 \leqslant u_0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence : $0 < u_{n+1} \leqslant u_n < \mathrm{e} - 1$. Or, $f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $f(0) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) < f(\mathrm{e} - 1)$, *i.e.* $0 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1} < \mathrm{e} - 1$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a ainsi montré par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} \leqslant u_n < \mathrm{e} - 1.}$$

□

***b)*** En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ puis que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$.

*Démonstration.* D'après la question précédente, la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell \in [0, u_0]$.
Remarquons que :

- $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par argument de suite extraite
- $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ par continuité de $f$ sur $[0, u_0]$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, par unicité de la limite : $\ell = f(\ell)$.
D'après la question ***1.c)***, $\ell = 0$ ou $\ell = \mathrm{e} - 1$. Puisque $\ell \leqslant u_0 < \mathrm{e} - 1$, on a nécessairement $\ell = 0$.
Donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Ensuite, on sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut alors écrire que $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
Finalement,

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2}$$

□

*(On souhaite dans la suite de cette question préciser la vitesse de convergence vers* 0*)*

***c)*** On pose $K = \ln(1+u_0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant K u_n$.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$.
La suite $(u_n)$ est décroissante donc $u_n \leqslant u_0$.
Par croissance de ln sur $]0, +\infty[$, on obtient $\ln(1+u_n) \leqslant \ln(1+u_0) = K$.
On multiplie par $u_n > 0$ :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \ln(1+u_n) \leqslant K u_n.}$$

□

***d)*** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant K^n u_0$.

*Démonstration.* Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n \leqslant K^n u_0$ »
<u>Initialisation</u> :
On a bien $u_0 \leqslant K^0 u_0$ car $K^0 = 1$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant K u_n && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &\leqslant K K^n u_0 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &\leqslant K^{n+1} u_0 \end{aligned}$$

On a ainsi montré par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant K^n u_0.}$$

$\square$

***e)*** Vérifier que $0 < K < 1$ puis retrouver la limite de la suite $(u_n)$.

*Démonstration.* On sait que $0 < u_0 < \mathrm{e} - 1$ donc $1 < 1 + u_0 < \mathrm{e}$ d'où $0 < K < 1$ par croissance stricte de ln sur $]0, +\infty[$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant K^n u_0$ et $K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par théorème d'encadrement :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

$\square$

***4.*** Que se passe-t-il lorsque $u_0 = \mathrm{e} - 1$ ?

*Démonstration.* Dans ce cas, la suite $(u_n)$ est constante (car $\mathrm{e} - 1$ est un point fixe de $f$). Plus précisément :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e} - 1.}$$

$\square$

***5.*** (*) *Informatique.* Expliquer ce que réalise le script **Python** suivant :

```
def f(x):
    return x * np.log(1+x)

x = np.arange(0.01, 3, 0.1)
plt.plot(x, f(x))

x = [0, 3]
plt.plot(x, x)

u = np.e - 1.1
x = [u]
y = [0]
for k in range(1, 11):
    z = f(u)
    x.append(u)
    x.append(z)
    y.append(z)
    y.append(z)
    u = z
plt.plot(x, y)
plt.grid()
plt.show()
```

*Démonstration.* Ce script trace sur un même graphique :

- le graphe de $f$ au dessus du segment $[0, 3]$
- la droite d'équation $y = x$

Il procède ensuite à la construction des 10 premiers termes de la suite $(u_n)$ lorsque $u_0 = \mathrm{e} - 1,1$. La technique consiste à reporter les ordonnées sur l'axe des abscisse via la droite d'équation $y = x$.

On reproduit ici le graphique obtenu par **Python** :

On voit bien que la suite $(u_n)$ décroît et converge vers 0. $\square$