Table des matières

1 Notion d'application linéaire

1.1 Définition

Definition 1. Soient E et F des espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* si

- L'image d'une somme est la somme des images :

$$\forall u, v \in E, f(u+v) = f(u) + f(v)$$

- L'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

Une application linéaire de E dans E est appelée un *endomorphisme* de E.

Definition 2 (Hors-programme)**.** Soient E et F des espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$. Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$ à la place de $\mathscr{L}(E,E)$.

Théoreme 1 (Caractérisation des applications linéaires)**.** *Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$. L'application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si*

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (u,v) \in E^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

1.2 Propriétés

Proposition 2. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors*

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. *Pour tout $u \in E$, $f(-u) = -f(u)$.*
3. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n$,

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n)$$

Autrement dit,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(u_k)$$

Exemple 1. L'application nulle de E dans F, définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \mapsto & 0_F \end{array} \right.$, est une application linéaire.

L'application identité de E, définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ u & \mapsto & u \end{array} \right.$, est une application linéaire.

1.3 Exemple fondamental

Théoreme 3. *Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Alors, il existe une unique matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que h s'écrit sous la forme :*

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Exercice 1 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x - 5y \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 3x+y) \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x+y, 3x) \end{array} \right.$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM + BM \end{array} \right.$

Exercice 3 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(0)X + P(X) \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & XP(X+1) \end{array} \right.$

2 Opérations sur les applications linéaires

2.1 Somme et produit par un scalaire

Soient E et F des espaces vectoriels. Soient f et g des applications linéaires de E dans F. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit

$$f + g : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ u & \mapsto & f(u) + g(u) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \lambda f : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ u & \mapsto & \lambda f(u) \end{array} \right.$$

Les applications $f + g$ et λf sont également des applications linéaires de E dans F.

2.2 Composition d'applications linéaires

Definition 3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on définit les notations :

- $f^0 = \mathrm{Id}_E$
- $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f \ (= f \circ f^k)$

Remarque 1. Attention, la notation $f^2(u) = f(f(u))$ ne doit pas être confondue avec l'élévation au carré ! $f(u) \times f(u)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels.

Théoreme 4. *Soient E, F, G et H des espaces vectoriels.*

- *Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$.*
- *La composée de deux applications linéaires est linéaire : si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

- *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $h \in \mathscr{L}(G,H)$, alors :*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

On pourra donc noter $h \circ g \circ f$ l'application linéaire $h \circ (g \circ f) \in \mathscr{L}(E,H)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & G \arrow[r, "h"] \arrow[r, bend right, "h"'] & H \end{tikzcd}$$

- *Si* $f \in \mathscr{L}(E,F)$, *et si* $(g_1, g_2) \in \mathscr{L}(F,G)^2$, *alors :*
$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$
- *Si* $f_1 \in \mathscr{L}(E,F)$, $f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ *et si* $g \in \mathscr{L}(F,G)$, *alors :*
$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$
- *Si* $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ *et si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors :*
$$g \circ (\lambda \cdot f) = (\lambda \cdot g) \circ f = \lambda \cdot (g \circ f)$$

2.3 Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

Definition 4. Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $u : E \to F$.

1. On dit que u est un *isomorphisme de E dans F* si :
   - u est linéaire
   - u est bijective
2. Si il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont *isomorphes*.
3. Si u est un isomorphisme de E dans E (cas $F = E$), alors on dit que u est un *automorphisme de E*.

Théoreme 5. *Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si u est un isomorphisme de E dans F, alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E. Autrement dit, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.*

Théoreme 6. *Soient E, F et G des espaces vectoriels. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Supposons que u et v soient des isomorphismes.*

- *Alors $v \circ u : E \to G$ est un isomorphisme de E dans G.*
- *De plus :* $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$.

3 Noyau et image d'une application linéaire

3.1 Noyau d'une application linéaire

3.1.1 Définition

Definition 5. Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *noyau de f* et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble :
$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}}$$
Ainsi, le noyau de f est le *lieu* où elle s'annule.

Exemple 2. Reprenons l'exemple fondamental. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$
Alors $\mathrm{Ker}(f) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $MX = 0$ (p inconnues et n équations).

3.1.2 Structure du noyau d'une application linéaire

Théoreme 7. *Soient E et F des espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque 2. Ce théorème permet de démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel en utilisant une question précédente où l'on a démontré la linéarité d'une application.

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On reconnait que

$$F = \mathrm{Ker}(\varphi) \qquad \text{où} \qquad \varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$$

Or, φ est linéaire d'où le résultat.

Exercice 4 : Calculer le noyau des applications linéaires suivantes.

1. $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y \\ y + z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

2. $g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & 3x + 2y - z \end{array} \right.$

3.1.3 Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Théoreme 8. *Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

$$\begin{aligned} f \textit{ injective} &\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \\ &\iff \forall u \in E, (f(u) = 0_F \iff u = 0_E) \\ &\iff \forall u \in E, (f(u) = 0_F \implies u = 0_E) \end{aligned}$$

Méthode. Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective.

1. On fixe $u \in E$: « Soit $u \in E$ »
2. On résout l'équation $f(u) = 0_F$ sous la forme d'un système linéaire.
3. On démontre finalement que $f(u) = 0_F \iff u = 0_E$.

3.2 Image d'une application linéaire

3.2.1 Définition

Definition 6. Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *image de* f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \in F \mid x \in E\} \end{aligned}$$

Exemple 4. Reprenons l'exemple fondamental. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Alors $\mathrm{Im}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ Y = MX\}$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des seconds membres $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que le système $MX = Y$ (d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$) admet une solution.

3.2.2 Structure de l'image d'une application linéaire

Théoreme 9. *Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

3.2.3 Caractérisation de la surjectivité d'une application linéaire à l'aide de son image

Théoreme 10. *Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

$$\boxed{f \textit{ surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F}$$

4 Applications linéaires en dimension finie

4.1 Image d'une application linéaire en dimension finie

Théoreme 11. *Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors* $\mathrm{Im}(f)$ *est le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$:*

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))}$$

Méthode. On utilisera toujours cette formule pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$. Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$, il faut extraire une famille libre de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Exercice 5 : Calculer l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) - P(X+1) + P(0)X^2 \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Proposition 12. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

1. *f est injective ssi l'image par f de toute famille libre (forcément finie) de E est une famille libre (forcément finie) de F.*
2. *f est surjective ssi l'image par f de toute famille génératrice finie de E est une famille (finie) génératrice de F.*
3. *f est un isomorphisme de E dans F ssi l'image par f de toute base (forcément finie) de E est une base (forcément finie) de F.*

Théoreme 13. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie. S'il existe un isomorphisme de E vers F alors* $\dim(E) = \dim(F)$.

4.2 Rang d'une application linéaire

Definition 7. Soient E et F des ev de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *rang* de l'application f et on note $\mathrm{rg}(f)$ le nombre :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Remarque 3. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et on a

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Théoreme 14 (Théorème du rang)**.** *Soient E et F des ev de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dim(E) & = & \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ & = & \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) \end{array}}$$

Exercice 6 : Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de Φ.
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(\Phi)$.
4. Vérifier que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 15. *Soient E et F des ev de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

On a $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ *et* $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$. *De plus,*

- *f est injective* $\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
- *f est surjective* $\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Théoreme 16 (Caractérisation des isomorphismes)**.** *Soient E et F des ev de dimension finie. On suppose que* $\dim(E) = \dim(F)$ *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Autrement dit,

$$f \text{ est bijective} \iff \ker(f) = \{0\} \iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F).$$

Si c'est le cas, alors f est un isomorphisme de E dans F.

Exercice 7 : Les applications linéaires suivantes sont-elles des isomorphismes ?

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, 2y, -x + 3y + z) \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y) & \mapsto & \begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x - y & -y \end{pmatrix} \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) \end{array} \right.$
4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c, a + d, b - c, c) \end{array} \right.$
5. $f_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, 2y) \end{array} \right.$
6. $f_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

5 Représentations matricielles de vecteurs et d'applications linéaires

5.1 Matrice colonne associée à un vecteur

5.1.1 Définition

Definition 8. Soit E un espace vectoriel. On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

- Soit $x \in E$. Il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :
$$x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$$
La base $\mathcal{B}_E$ étant fixée, le vecteur x est entièrement déterminé par la donnée du p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$, que l'on nomme *coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_E$.*
- Le vecteur x admet alors naturellement une représentation matricielle. Il s'agit du vecteur colonne :
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$
Ce vecteur colonne est appelé *vecteur (ou matrice) colonne associé à x dans la base $\mathcal{B}_E$*. Dans la suite, on notera :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

A retenir :

$$\boxed{\text{Choix d'une base}} \longrightarrow \boxed{\text{Représentation matricielle des vecteurs en coordonnées}}$$

Exercice 8 : On note $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Plus précisément :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad P_2(X) = X^2$$

On note $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ la famille de vecteurs définie par :

$$R_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X - 1)^2$$

On considère : $T(X) = 2(X - 1)^2 - 3(X - 1) - 4$.

1. (a) Quel est le vecteur colonne associé à P_0 dans la base $\mathcal{B}_1$? Même question pour P_1 et P_2.
   (b) Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. (a) Démontrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Quel est le vecteur colonne associé à R_0 dans la base $\mathcal{B}_2$? Même question pour R_1 et R_2.
   (c) Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

5.1.2 Isomorphisme de représentation

Théoreme 17. *Soit E un espace vectoriel. On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ & & x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, une fois que la base $\mathcal{B}_E$ est fixée, pour tout vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur x de E dont X est la représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}_E$.

5.1.3 Matrice de passage

Definition 9. Soit E un espace vectoriel. On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_p')$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$* et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice :

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1') \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e_p')\right)}$$

Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à e_1', e_2', …, e_p' dans la base $\mathcal{B}$.

Théoreme 18. *Soit E un espace vectoriel. On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Soit $x \in E$. Alors*

1. $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)}$

2. $\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$

3. La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et : $\boxed{(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}$

Exercice 9 : On considère de nouveau $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ et $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$. On note $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
2. Déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.
3. (a) Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathcal{B}_2$.
   (b) Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathcal{B}_1$ à l'aide de la formule de changement de base.
   (c) Écrire alors la formule de chagement de base permettant de déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathcal{B}_2$ connaissant la matrice colonne associée à T dans la base $\mathcal{B}_1$.

Démonstration. 1. Exprimons les vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

(a) $R_0 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(R_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $R_1 = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(R_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $R_2 = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(R_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Exprimons les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$.
   (a) $P_0 = 1 \cdot R_0 + 0 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

   Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) $P_1 = -1 \cdot R_0 + 1 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

   Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (c) $P_2 = 1 \cdot R_0 + 2 \cdot R_1 + 1 \cdot R_2$

   Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ainsi : $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) Comme $T = -4 \cdot R_0 + -3 \cdot R_1 + 2 \cdot R_2$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(T) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (b) On écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(T) &= P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(T) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (c) On écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(T) &= P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(T) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

5.2 Matrice associée à une application linéaire

5.2.1 Définition

Definition 10. Soient E et F des espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $h \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle *matrice représentative de h dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$* (ou *matrice associée à h dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$*) la matrice :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(h) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(h(e_1)\big) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(h(e_p)\big)\Big)}$$

Autrement dit, c'est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $h(e_1)$, $h(e_2)$, …, $h(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, alors on note

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(h(e_1)\big) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(h(e_p)\big)\Big)}$$

Méthode. Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, on calcule l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}_E$ puis on décompose le résultat dans la base $\mathcal{B}_F$. Il y a donc p calculs différents à faire si E est de dimension p (on calcule p vecteurs colonnes).

Exercice 10 : On considère les endomorphismes

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathcal{B}' = (P_0, P_2, P_1, P_3)$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ puis en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$ puis en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\psi)$.

Exercice 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

Écrire la matrice de φ dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5.2.2 Isomorphisme de représentation

Théoreme 19. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie p et n respectivement. On note $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F.*

Les applications :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \end{array} \right.$$

sont des isomorphismes.

5.2.3 Matrice de passage

Théoreme 20 (Formule de changement de base)**.** *Soit E un ev de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors, on a la relation*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\ P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}$$

ce que l'on peut réécrire

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\ (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}}$$

5.3 Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices associées

5.3.1 Matrice représentative d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Théoreme 21. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies. On note $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par isomorphisme de représentation :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(g)$$

5.3.2 Image d'un vecteur par une application linéaire via la matrice associée

Théoreme 22. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies. On note $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient $x \in E$ et $y \in F$.*

On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

et donc

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) \\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) \end{aligned}$$

5.3.3 Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

Théoreme 23. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies p et n. On note $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit $x \in E$.*

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Exercice 12 :(EDHEC 2016)
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans la suite, on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

5.3.4 Composée d'applications linéaires et produit matriciel

Théoreme 24. *Soient E, F, et G des vectoriels de dimensions finies. On note $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F, et G.*

- *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$:*

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)}$$

  (la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)
- *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}\left(f^k\right) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)\right)^k}$$

5.3.5 Bijection réciproque et inverse de la matrice associée

Théoreme 25. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.*

- *f est bijective si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible*
- *Si f est bijective, alors $(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)$*

Remarque 4. En général, il est plus simple de travailler avec les matrices. Pour montrer qu'une matrice est inversible on appliquera l'algorithme du pivot de Gauss pour calculer son rang.

5.4 Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Théoreme 26. *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies. On note $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f))}$$

Exercice 13 : Soit f un endomorphisme dont la matrice représentative est notée A. Calculer le rang de f et dire si f est bijective dans chacun des cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -9 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

6 Compléments hors-programme : endomorphismes nilpotents

Definition 11. Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que f est *nilpotent* si il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Rappel :

$$\begin{aligned} f^r = 0_{\mathscr{L}(E)} &\iff f^r \text{ est l'endomorphisme nul} \\ &\iff \text{pour tout } u \in E,\ f^r(u) = 0_E \end{aligned}$$

Exercice 14 : Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{r-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ (on dit alors que f est *nilpotent d'ordre* r). Soit $u \in E$ tel que $f^{r-1}(u) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(u, f(u), \dots, f^{r-1}(u))$ est libre.

Démonstration. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \in \mathbb{R}^r$ tel que

$$\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f^k(u) = 0_E$$

- On compose l'égalité précédente par f^{r-1} :

  $$\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f^{k+r-1}(u) = 0_E$$

  or, $f^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc

  $$\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f^{k+r-1}(u) = \lambda_0 f^{r-1}(u) + \lambda_1 f^r(u) + \cdots + \lambda_{r-1} f^{2r-2}(u) = \lambda_0 f^{r-1}(u)$$

  Comme $f^{r-1}(u) \neq 0_E$, on en déduit que $\boxed{\lambda_0 = 0}$ et

  $$\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k f^k(u) = 0_E$$

- On compose l'égalité précédente par f^{r-2} :

  $$\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k f^{k+r-2}(u) = 0_E$$

  or,

  $$\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k f^{k+r-2}(u) = \lambda_1 f^{r-1}(u) + \lambda_2 f^r(u) + \cdots + \lambda_{r-1} f^{2r-3}(u) = \lambda_1 f^{r-1}(u)$$

  Comme $f^{r-1}(u) \neq 0_E$, on en déduit que $\boxed{\lambda_1 = 0}$ et

  $$\sum_{k=2}^{r-1} \lambda_k f^k(u) = 0_E$$

- En itérant ce procédé, on obtient finalement $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{r-1} = 0$.

Donc la famille $(u, f(u), \dots, f^{r-1}(u))$ est libre. □