Table des matières

1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes 2
- 1.1 Définition . . . 2
- 1.2 Système complet d'événements associé à une v.a.r. discrète . . . 2
- 1.3 Loi d'une v.a.r. discrète . . . 3
- 1.4 Fonction de répartition d'une v.a.r. discrète . . . 3
- 1.5 Opérations sur les v.a.r. discrètes . . . 4
- 1.6 Transformation d'une v.a.r. discrète . . . 4

2 Espérance d'une variable aléatoire discrète 5
- 2.1 Définition . . . 5
- 2.2 Propriétés de l'espérance . . . 6
- 2.3 Théorème de transfert . . . 7
- 2.4 Moments d'ordre r . . . 7

3 Variance d'une variable aléatoire discrète 8
- 3.1 Définition . . . 8
- 3.2 Détermination pratique de la variance . . . 8
- 3.3 Propriétés de la variance . . . 9
- 3.4 Variables centrées réduites . . . 9

4 Lois discrètes finies 10
- 4.1 Loi certaine . . . 10
- 4.2 Loi uniforme . . . 11
- 4.3 Loi de Bernoulli . . . 12
- 4.4 Loi binomiale . . . 13

5 Lois discrètes infinies 14
- 5.1 Loi géométrique . . . 14
- 5.2 Loi de Poisson . . . 16

1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

1.1 Définition

Definition 1. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- La v.a.r. X est dite *discrète* si son ensemble image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (*i.e.* si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou si $X(\Omega)$ est infini dénombrable).
- On dit que la v.a.r. X est *finie* si $X(\Omega)$ est fini.
- On dit que la v.a.r. X est *infinie* si $X(\Omega)$ est un ensemble infini.

Remarque 1. Si la v.a.r. X est discrète, alors on peut numéroter les éléments de $X(\Omega)$. Deux cas se présentent en pratique :

1. Si X est finie, alors
$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
pour un certain entier $n \geq 1$.
2. Si X est infinie, alors
$$X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$
Il peut arriver que la numérotation des éléments se fasse par un autre ensemble dénombrable (par exemple $\mathbb{Z}$) mais c'est rare. A voir en exercice.

Si l'on veut travailler avec une v.a.r. discrète sans spécifier si elle est finie ou infinie, on écrira
$$X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\} \qquad \text{où } I \subseteq \mathbb{N}$$

Attention, il ne faut pas confondre *l'indexation par* $\mathbb{N}$ (cas où X est infinie) et le fait que $X(\Omega)$ soit *inclus* dans $\mathbb{N}$. A priori, les x_k sont des réels et n'ont aucune raison particulière d'être des entiers. Il existe cependant une implication : si la v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors X est discrète.

Exemple 1. Si $X(\Omega) = \{1, \sqrt{2}, \mathrm{e}^6, 23\}$, alors :

- X est une v.a.r. discrète (puisque $X(\Omega)$ est un ensemble fini),
- X n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1.2 Système complet d'événements associé à une v.a.r. discrète

Théoreme 1. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$. La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé* système complet d'événements associé à X.

Théoreme 2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.*

- *Si X est fini* i.e. $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *alors :* $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = x_i]) = 1$
- *Si X est infini* i.e. $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *alors :* $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = x_i]) = 1$
- *On peut résumer ces propriétés en notant :*
$$\boxed{\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1}$$

Remarque 2. Cette formule peut servir à :

1. Vérifier ses calculs.
2. Calculer le paramètre d'une loi discrète (voir l'exo 1).
3. Calculer la dernière proba si on connait toutes les autres. Exemple : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si on connait déjà $\mathbb{P}([X = x_k])$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$ alors on peut calculer $\mathbb{P}([X = x_4])$ en écrivant
$$\mathbb{P}([X = x_4]) = 1 - (\mathbb{P}([X = x_1]) + \mathbb{P}([X = x_2]) + \mathbb{P}([X = x_3]))$$

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une v.a.r. telle que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\mathbb{P}([X = k]) = \alpha k$$
Déterminer la valeur de α.

1.3 Loi d'une v.a.r. discrète

Definition 2. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- On appelle *loi de probabilité* de X et on note $\mathbb{P}_X$ l'application :

$$\mathbb{P}_X \quad : \left| \begin{array}{ccccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) & = & \mathbb{P}([X = x]) \end{array} \right.$$

- Autrement dit, la loi de X est la donnée de
  1. l'ensemble image $X(\Omega)$
  2. toutes les valeurs $\mathbb{P}([X = x])$ pour x décrivant $X(\Omega)$

Remarque 3. Dans le cas d'une v.a.r. discrète finie, on pourra représenter la loi de X sous la forme d'un tableau.

Exemple 2. On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 4 lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

- $\Omega = \{P, F\}^4$.
- On munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$ *($(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé).* $\text{Card}(\Omega) = 2^4 = 16$.
- On note X la v.a.r. discrète finie qui compte le nombre de P obtenus lors des quatre lancers. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

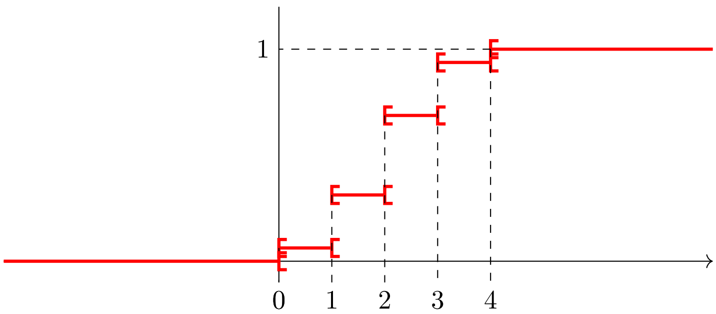
$x \in X(\Omega)$	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}([X = x])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

1.4 Fonction de répartition d'une v.a.r. discrète

Théoreme 3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$). Alors la fonction de répartition F_X est déterminée par :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ i \in I}} \mathbb{P}([X = x_i])}$$

Exemple 3. On reprend l'exemple précédent. La fonction de répartition de la v.a.r. X comptant le nombre de P est donnée par le graphe suivant.



Rappelons que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Expliquons comment obtenir ce graphique :

- si $x < 0$: $[X \leq x] = \emptyset$. Ainsi : $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = 0$.
- si $x \in [0, 1[$: $[X \leq x] = [X = 0]$. Ainsi : $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{16}$.
- si $x \in [1, 2[$: $[X \leq x] = [X = 0] \cup [X = 1]$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leq x]) = \mathbb{P}([X = 0] \cup [X = 1]) \\ & = & \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16} \end{array}$$

- si $x \in [2,3[$: $F_X(x) = \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([X=1]) + \mathbb{P}([X=2]) = \frac{9}{16}$
- ...

On obtient une fonction constante par morceaux qui présente des sauts de discontinuité. Cette forme en escalier est *caractéristique* des fonctions de répartition des v.a.r. discrètes. Les contremarches (*i.e.* les sauts de discontinuité) ont pour hauteur les valeurs successives de $\mathbb{P}([X = x_i])$ (les x_i étant rangés dans l'ordre).

1.5 Opérations sur les v.a.r. discrètes

Théoreme 4. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soient X et Y deux v.a.r. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X+Y$, λX et XY sont des v.a.r. discrètes, où l'on a noté :*

- $X+Y \ : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega)+Y(\omega) \end{array} \right.$
- $\lambda X \ : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \lambda X(\omega) \end{array} \right.$
- $XY \ : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega)\,Y(\omega) \end{array} \right.$

1.6 Transformation d'une v.a.r. discrète

Definition 3. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application. On notera $g(X)$ l'application composée $g \circ X$:

$$g(X) \ : \ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array}$$

Théoreme 5. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$). Soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application. L'application $g(X)$ est une v.a.r. discrète dont la loi est donnée par :*

1. $g(X)(\Omega) = g(X(\Omega)) = \{g(x_i) \mid i \in I\}$.
2. $\boxed{\forall y \in g(X)(\Omega), \quad \mathbb{P}([g(X) = y]) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}([X = x_i])}$

Remarque 4. Il ne faut pas retenir cette formule par coeur. Par contre, il faut savoir la retrouver sur les exemples concrets des exercices.

Exemple 4. On reprend l'exemple précédent. Rappel : on considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 4 lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée. $\Omega = \{P, F\}^4$, muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$. On note X la v.a.r. discrète finie qui compte le nombre de P obtenu lors du lancer, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Loi de X :

$x \in X(\Omega)$	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}([X = x])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Premier exemple. On pose $g(x) = 2x + 3$. Quelle est la loi de $g(X)$?

1. On commence par déterminer $g(X)(\Omega)$.

$$\begin{aligned} g(X)(\Omega) &= \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} \\ &= \{g(k) \mid k \in [\![0, 4]\!]\} \\ &= \{2k + 3 \mid k \in [\![0, 4]\!]\} \\ &= \{3, 5, 7, 9, 11\} \end{aligned}$$

2. On calcule ensuite les probabilités des événements $\mathbb{P}([g(X) = y])$ pour $y \in g(X)(\Omega)$.
   Soit $k \in [\![0, 4]\!]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([g(X) = 2k + 3]) &= \mathbb{P}([2X + 3 = 2k + 3]) \\ &= \mathbb{P}([X = k]) \end{aligned}$$

   On obtient le tableau de la loi

$y \in g(X)(\Omega)$	3	5	7	9	11
$\mathbb{P}([g(X) = y])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

L'exemple précédent était simple parce que g est une fonction bijective.

Deuxième exemple. On pose $h(x) = (x-2)^2$. Quelle est la loi de $h(X)$?

1. On commence par déterminer $h(X)(\Omega)$.

$$\begin{aligned} h(X)(\Omega) &= \{h(x) \mid x \in X(\Omega)\} \\ &= \{h(k) \mid k \in [\![0,4]\!]\} \\ &= \left\{(k-2)^2 \mid k \in [\![0,4]\!]\right\} \\ &= \{0,1,4\} \end{aligned}$$

2. On calcule ensuite les probabilités des événements $\mathbb{P}([h(X) = y])$ pour $y \in h(X)(\Omega)$. Soit $k \in [\![0,4]\!]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\left[h(X) = (k-2)^2\right]) &= \mathbb{P}(\left[(X-2)^2 = (k-2)^2\right]) \\ &= \mathbb{P}([X-2 = k-2 \qquad \texttt{OU} \qquad X-2 = -(k-2)]) \\ &= \mathbb{P}([X-2 = k-2] \cup [X-2 = -(k-2)]) \\ &= \mathbb{P}([X = k] \cup [X = 4-k]) \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X = 4-k]) & \text{si } k \neq 2\text{, par } \sigma\text{-additivité} \\ \mathbb{P}([X = 2]) = \frac{6}{16} & \text{si } k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient le tableau de la loi

$z \in h(X)(\Omega)$	0	1	4
$\mathbb{P}([h(X) = z])$	$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{2}{16}$

2 Espérance d'une variable aléatoire discrète

2.1 Définition

Definition 4. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Premier cas : X est finie et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Dans ce cas, on appelle *espérance* de la v.a.r. X le nombre réel

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

Deuxième cas : X est infinie et $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
Dans ce cas, **si la série** $\sum x_n \ \mathbb{P}([X = x_n])$ **est absolument convergente**, on appelle *espérance* de la v.a.r. X le nombre réel

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

On peut regrouper les deux définitions précédents sous une seule forme. De manière générale, si on écrit $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ (avec $I \subset \mathbb{N}$) alors, sous réserve d'existence :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{i \in I} x_i \ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

Remarque 5. L'espérance est une moyenne pondérée : on somme chaque valeur possible pour X pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.

Remarque 6.

- Une v.a.r. discrète `FINIE` admet `TOUJOURS` une espérance.
- Une v.a.r. discrète `INFINIE` n'admet pas nécessairement une espérance. L'hypothèse de `CONVERGENCE ABSOLUE` est fondamentale pour la bonne définition de la notion d'espérance.

Remarque 7. L'espérance peut être pensée comme une généralisation de la notion de moyenne. Illustrons ce point avec l'exemple suivant.

- Expérience aléatoire : on effectue 1 lancer d'un dé à 6 faces.
- Univers : $\Omega = [\![1,6]\!]$.
- Notons X la v.a.r. égale au résultat du lancer.
- $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ donc X est donc une v.a.r. discrète finie.
  1. Dans un premier temps, munissons Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_1$. La v.a.r. X étant finie, elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}_1([X=x]) \ = \ \sum_{k=1}^{6} k\ \mathbb{P}_1([X=k]) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k \ = \ \frac{1}{6}\ \frac{6(6+1)}{2} \ = \ 3,5 \end{array}$$

     Le réel $3,5$ est la moyenne des résultats du lancer d'un dé équilibré (probabilité $\mathbb{P}_1$ prise en compte).
  2. On munit maintenant Ω de la probabilité $\mathbb{P}_2$ telle que :

$$\mathbb{P}_2(\{4\}) = \mathbb{P}_2(\{5\}) = \mathbb{P}_2(\{6\}) = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_2(\{1\}) = \mathbb{P}_2(\{2\}) = \mathbb{P}_2(\{3\}) = 0$$

     La v.a.r. X étant finie, elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}_2([X=x]) \ = \ \sum_{k=1}^{6} k\ \mathbb{P}_2([X=k]) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=4}^{6} k\ \mathbb{P}_2([X=k]) \ = \ \frac{1}{3}\sum_{k=4}^{6} k \ = \ \frac{1}{3}\ \frac{3(4+6)}{2} \ = \ 5 \end{array}$$

     Le réel 5 est la moyenne des résultats du lancer dans le cas de notre dé truqué (probabilité $\mathbb{P}_2$ prise en compte).

2.2 Propriétés de l'espérance

Théoreme 6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux v.a.r. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On suppose que X et Y admettent chacune une espérance. L'opérateur espérance vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les v.a.r. $X+Y$ et λX admettent une espérance. De plus :*
   $\boxed{\mathbb{E}(X+Y) \ = \ \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$ *et* $\boxed{\mathbb{E}(\lambda X) \ = \ \lambda \mathbb{E}(X)}$ *(linéarité de l'espérance)*
2. *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la v.a.r. $aX+b$ admet une espérance. De plus :*
   $\boxed{\mathbb{E}(a) \ = \ a}$ *et* $\boxed{\mathbb{E}(aX+b) \ = \ a\ \mathbb{E}(X) + b}$
3. $\boxed{X \ \geq \ 0 \ \Rightarrow \ \mathbb{E}(X) \ \geq \ 0}$ *(positivité de l'espérance)*
4. $\boxed{X \ \leq \ Y \ \Rightarrow \ \mathbb{E}(X) \ \leq \ \mathbb{E}(Y)}$ *(croissance de l'espérance)*
5. $\boxed{\left.\begin{array}{l} X \geq 0 \\ \mathbb{E}(X) = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \mathbb{P}([X=0]) = 1}$ *(X est presque sûrement nulle)*

Remarque 8. Dire que $X \leq Y$, c'est dire que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X(\omega) \leq Y(\omega)$.

2.3 Théorème de transfert

Théoreme 7 (Théorème de transfert)**.** *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* X *une v.a.r. discrète sur* $(\Omega, \mathscr{A})$*. Soit* $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ *une application.*

Premier cas : X *est finie et* $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$*.*
Dans ce cas, la v.a.r. $g(X)$ *admet une espérance de valeur :*

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

Deuxième cas : X *est infinie et* $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$*.*
Dans ce cas, la v.a.r. $g(X)$ *admet une espérance si et seulement si la série* $\sum g(x_n)\ \mathbb{P}([X = x_n])$ *est absolument convergente. Si c'est le cas, alors :*

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(x_i)\ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

De manière générale, sous réserve d'existence :

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\ \mathbb{P}([X = x])}$$

Exemple 5. On reprend l'exemple précédent. Rappel : on considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 4 lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée. $\Omega = \{P, F\}^4$, muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$. On note X la v.a.r. discrète finie qui compte le nombre de P obtenu lors du lancer, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Loi de X :

$x \in X(\Omega)$	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}([X = x])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

On souhaite calculer l'espérance de $(X-2)^2$.
X est finie donc $(X-2)^2$ également donc $(X-2)^2$ admet une espérance. On a $(X-2)^2 = g(X)$ où $g : x \mapsto (x-2)^2$.
Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}((X-2)^2) = \sum_{k=0}^{4} (k-2)^2 \mathbb{P}([X = k]) = 4\frac{1}{16} + 2\frac{4}{16} + 0 + 2\frac{4}{16} + 4\frac{1}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

2.4 Moments d'ordre *r*

Definition 5. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Premier cas : X est finie et $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Dans ce cas, la v.a.r. X admet, pour tout $r \in \mathbb{N}$, un *moment d'ordre* r :

$$\boxed{m_r(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i^r\ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

Deuxième cas : X est infinie et $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Soit $r \in \mathbb{N}$.
Dans ce cas, si la série $\sum x_n^r\ \mathbb{P}([X = x_n])$ est absolument convergente, on dit que la v.a.r. X admet un *moment d'ordre* r :

$$\boxed{m_r(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^r\ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

De manière générale, sous réserve d'existence :

$$\boxed{m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r\ \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{E}(X^r)}$$

Remarque 9. $\mathbb{E}(X) = m_1(X)$

Proposition 8. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* X *une v.a.r. discrète sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *et* $r \in \mathbb{N}^*$. *Si* X *admet un moment d'ordre* 2 *alors* X *admet un moment d'ordre* 1, i.e. *une espérance.*

3 Variance d'une variable aléatoire discrète

3.1 Définition

Definition 6 (Variance)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Supposons que :

- la v.a.r. X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$,
- la v.a.r. $X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2.

On dit alors que la v.a.r. X admet une *variance*, notée $\mathbb{V}(X)$ et définie par :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = m_2(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big)}$$

Sous ces hypothèses on appelle *écart-type* le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque 10. La variance est une mesure **moyenne** de l'écart existant entre X (variable aléatoire) et $\mathbb{E}(X)$ (constante réelle). La variance considère un écart quadratique (au carré). Il est alors naturel d'introduire l'écart-type (la racine de la variance) pour gommer le « défaut quadratique » introduit par ce choix d'écart.

3.2 Détermination pratique de la variance

Théoreme 9 (Formule de Kœnig-Huygens)**.** *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* X *une v.a.r. discrète sur* $(\Omega, \mathscr{A})$. *La v.a.r.* X *admet une variance si et seulement si la v.a.r.* X *admet un moment d'ordre* 2. *Si c'est le cas, alors on a :*

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que dans le cas où X admet une espérance :

$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 \;=\; X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2 \qquad (*)$$

Et ainsi :

$$X^2 \;=\; (X - \mathbb{E}(X))^2 + 2\,\mathbb{E}(X)\,X - (\mathbb{E}(X))^2 \qquad (**)$$

($\Rightarrow$) Supposons que X admet une variance. Par définition de la variance, X et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admettent donc une espérance. Or, d'après l'égalité $(**)$, la v.a.r. X^2 s'écrit comme la somme de v.a.r. qui admettent une espérance. Elle admet donc une espérance.

($\Leftarrow$) Supposons que X admet un moment d'ordre 2. Alors X admet un moment d'ordre 1. Autrement dit, X admet une espérance. L'égalité $(*)$ démontre alors que la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance car est la somme de v.a.r. admettant une espérance.

Supposons maintenant que X admet une variance et démontrons la formule.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\,X) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X))^2) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2
\end{aligned}$$

□

3.3 Propriétés de la variance

Théoreme 10. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X et Y deux v.a.r. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On suppose que X et Y admettent chacune une variance. L'opérateur variance vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les v.a.r. $X + Y$ et λX admettent une variance. De plus :*

$$\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\left(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)}$$

$$\text{et } \boxed{\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2\, \mathbb{V}(X)}$$

2. *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la v.a.r. $aX + b$ admet une variance. De plus :*

$$\boxed{\mathbb{V}(a) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(aX+b) = a^2\, \mathbb{V}(X)}$$

3. $\boxed{\mathbb{V}(X) \geq 0}$

Remarque 11. Attention, contrairement à l'espérance, l'opérateur de variance, défini à l'aide d'une élévation au carré, n'est pas linéaire.

3.4 Variables centrées réduites

Definition 7. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1. Si X admet une espérance :
   (a) si $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une v.a.r. *centrée*.
   (b) si $\mathbb{E}(X) \neq 0$, la v.a.r. $X - \mathbb{E}(X)$ est appelée *v.a.r. centrée associée à X*. Notons que cette v.a.r. admet une espérance car somme de v.a.r. admettant une espérance. De plus, comme son nom l'indique, cette v.a.r. est centrée :
   $$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \;=\; 0$$
2. Si X admet une variance non nulle :
   (a) si $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que X est une v.a.r. *réduite*.
   (b) si $\mathbb{V}(X) \neq 1$, la v.a.r. $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ (en supposant $\sigma(X) \neq 0$) est appelée *v.a.r. réduite associée à X*. Notons que cette v.a.r. admet une variance car multiple d'une v.a.r. admettant une variance. Comme son nom l'indique, cette v.a.r. est réduite :
   $$\mathbb{V}\left(\frac{X}{\sigma(X)}\right) \;=\; \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 \mathbb{V}(X) \;=\; \frac{1}{\mathbb{V}(X)}\,\mathbb{V}(X) \;=\; 1$$
3. Si X admet une variance non nulle, la variable $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X. Remarquons déjà que X^* admet une espérance et une variance car s'écrit sous la forme $aX + b$ avec $a = \dfrac{1}{\sigma(X)} \in \mathbb{R}$ et $b = -\dfrac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \in \mathbb{R}$.
   (a) Comme son nom l'indique, X^* est centrée car :
   $$\mathbb{E}(X^*) \;=\; a\,\mathbb{E}(X) + b \;=\; \frac{1}{\sigma(X)}\,\mathbb{E}(X) - \frac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \;=\; 0$$
   (b) Comme son nom l'indique, X^* est réduite car :
   $$\mathbb{V}(X^*) \;=\; a^2\,\mathbb{V}(X) \;=\; \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 \mathbb{V}(X) \;=\; \frac{\mathbb{V}(X)}{(\sigma(X))^2} \;=\; \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)} \;=\; 1$$

Remarque 12. On retiendra qu'à toute v.a.r. X qui admet une variance non nulle, on peut associer une v.a.r. X^* centrée réduite. Cette opération de normalisation peut être utile dans des démonstrations (on démontre une propriété pour une v.a.r. centrée réduite, on l'applique à X^* et on voit ce qu'on peut en déduire sur X). On reverra cette notion avec la loi normale (v.a.r. à densité).

4 Lois discrètes finies

4.1 Loi certaine

Definition 8. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

On dit que X suit une loi *certaine* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

1. $\boxed{X(\Omega) = \{m\}}$
2. $\boxed{\mathbb{P}([X = m]) = 1}$

Dans ce cas, on dira pour préciser que la v.a.r. X suit la *loi certaine égale à* m.

Si X est une v.a.r. discrète finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$: on dit que X suit une loi *quasi-certaine* s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathbb{P}([X = x_i]) = 1$ (dans ce cas, $\mathbb{P}([X = x_j]) = 0$ pour tout $j \neq i$).

Remarque 13 (Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée). On considère une expérience qui possède une ou plusieurs issues différentes dont une issue particulière U se produit avec probabilité 1. Alors la v.a.r. X égale à m (pour un $m \in \mathbb{R}$ choisi) si l'issue particulière U se produit suit une loi quasi-certaine.

Exemple 6.

1. On considère un dé truqué dont le résultat est toujours 6. L'expérience aléatoire consiste en un lancer de ce dé. On note X la v.a.r. donnant le résultat du dé. X suit une loi quasi-certaine ($X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et $\mathbb{P}([X = 6]) = 1$).
2. On considère une urne contenant n boules de couleurs différentes qui sont toutes numérotées par le même chiffre 7. L'expérience consiste à effectuer un tirage dans cette urne. On note X la v.a.r. donnant le numéro de la boule sortie. Alors X suit la loi certaine d'ensemble image $X(\Omega) = \{7\}$.

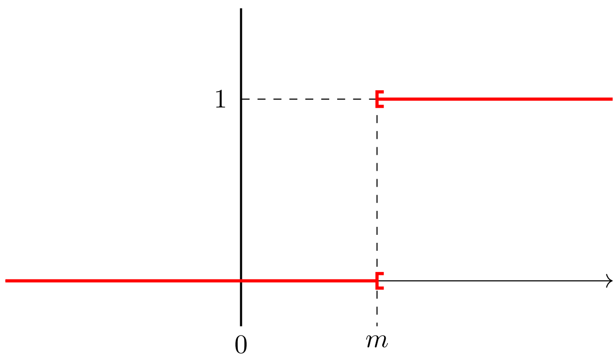
Remarque 14.

1. Le fait que $X(\Omega) = \{m\}$ implique que la v.a.r. X est constante égale à m.
2. Au contraire, une v.a.r. X suivant une loi quasi-certaine n'est pas constante (puisqu'elle peut prendre les valeurs x_1, ..., x_n).

Théoreme 11. *Soit X une v.a.r. discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine). Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}([X = m]) = 1$.*

1. *Alors X admet une espérance et une variance.*
2. *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = m}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = 0}$.

Remarque 15 (Fonction de répartition). Si X est une v.a.r. discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine) telle que $\mathbb{P}([X = m]) = 1$.



Proposition 12. *Soit X une v.a.r. discrète finie. Si $\mathbb{V}(X) = 0$ alors X suit une loi quasi-certaine.*

Remarque 16.

1. Cette propriété est une équivalence : la réciproque est justifiée par le théorème précédent qui donne le calcul de $\mathbb{V}(X)$.
2. Ainsi, la propriété $\mathbb{V}(X) = 0$ caractérise les v.a.r. X qui suivent une loi quasi-certaine.

4.2 Loi uniforme

Definition 9 (Loi uniforme)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On dit que X suit la loi *uniforme* sur $[\![1, n]\!]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si :

1. $\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$
2. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{n}}$

Plus généralement, si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, on dit qu'une v.a.r. X suit la loi *uniforme* sur $[\![a, b]\!]$ si :

1. $\boxed{X(\Omega) = [\![a, b]\!]}$
2. $\forall k \in [\![a, b]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{b - a + 1}}$

On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

Remarque 17 (Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée)*.* On considère une expérience qui possède n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables. Alors la v.a.r. X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience, suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Exemple 7.
1. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. L'expérience consiste à tirer une boule. On note X la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée. Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$
2. On considère une pièce équilibrée. L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce. On note X la v.a.r. égale à 1 si on obtient Pile et 0 si on obtient Face. Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$

Remarque 18*.* Attention, il s'agit bien de $\dfrac{1}{b - a + 1}$ et non de $\dfrac{1}{b - a}$. En effet, il y a $b - a + 1$ entiers entre a et b. Ce résultat est d'ailleurs cohérent avec le $\dfrac{1}{n}$ précédent.

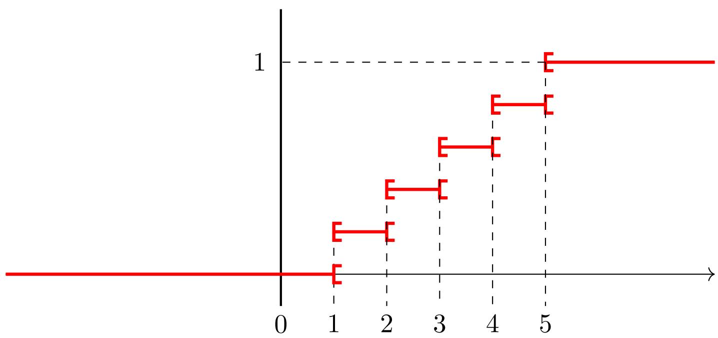
Théoreme 13. *Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.*

1. *La v.a.r. X admet une espérance et une variance.*
2. *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{n + 1}{2}}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}}$

Théoreme 14. *Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a < b$. Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$. On note : $Y = X - a + 1$.*

1. *Alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, b - a + 1]\!])$.*
2. *La v.a.r. X admet une espérance et une variance.*
3. *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{a + b}{2}}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b - a)(b - a + 2)}{12}}$

Exemple 8 (Fonction de répartition)*.* Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, 5]\!])$.



4.3 Loi de Bernoulli

Definition 10. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On dit que X suit la loi *de Bernoulli* de paramètre $p \in \,]0,1[$ si :

1. $\boxed{X(\Omega) = \{0,1\}}$
2. $\boxed{\mathbb{P}([X=1]) = p}$ et $\boxed{\mathbb{P}([X=0]) = 1-p} = q$

On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour signifier que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Remarque 19 (Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée)*.* On considère une expérience aléatoire possédant deux issues (qui ne sont pas forcément équiprobables). L'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ; l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$. Alors la v.a.r. X égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec (*i.e.* calculant le nombre de succès) suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemple 9.

1. On considère une pièce de monnaie donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$. L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce de monnaie. Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$. On note X la v.a.r. égale à 1 si on obtient Pile et à 0 si on obtient Face.
   - $X(\Omega) = \{0,1\}$.
   - $\mathbb{P}([X=1]) = p$ et $\mathbb{P}([X=0]) = 1-p$.

   Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
2. On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. L'expérience consiste à tirer une boule. Ainsi : $\Omega = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_{r+v}\}$ *(on numérote chacune des boules)*. On note X la v.a.r. égale à 1 si on tire une boule rouge et 0 si on tire une boule verte. Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{r+v}\right)$.

Remarque 20.

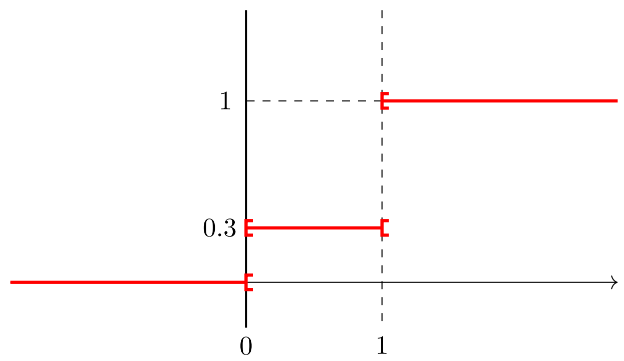
- Généralement, les cas $p = 0$ et $p = 1$ sont écartés : ils correspondent à une loi quasi-certaine.
- Si $p = \frac{1}{2}$, la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ coïncide avec la loi uniforme $\mathcal{U}([\![0,1]\!])$.
- Si X suit une loi de Bernoulli, alors $X(\Omega) = \{0,1\}$. On en déduit que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $X^r = X$ (c'est notamment vrai pour le cas $r = 2$).
- Considérons la v.a.r. X dont la loi est définie par :
  — $X(\Omega) = \{-1,1\}$.
  — $\mathbb{P}([X=1]) = p$ et $\mathbb{P}([X=-1]) = 1-p$.

  Alors X **ne suit pas** une loi de Bernoulli. Déjà, $X(\Omega) \neq \{0,1\}$.
  La v.a.r. X peut-être interprétée de la manière suivante. Si on obtient Pile (succès), la banque verse 1, si on obtient Face, on verse 1 à la banque. Autrement dit, X est le gain dans un jeu de Pile ou Face. Par contre, la v.a.r. $U = \frac{X+1}{2}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Théoreme 15. *Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ($p \in \,]0,1[$).*

1. *Alors X admet une espérance et une variance.*
2. *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = p}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = p\,q} = p\,(1-p)$

Exemple 10 (Fonction de répartition)*.* Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0.7)$.



4.4 Loi binomiale

Definition 11. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On dit que X suit la loi *binomiale* de paramètre (n, p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ si :

1. $\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!]}$
2. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$ avec $q = 1 - p$

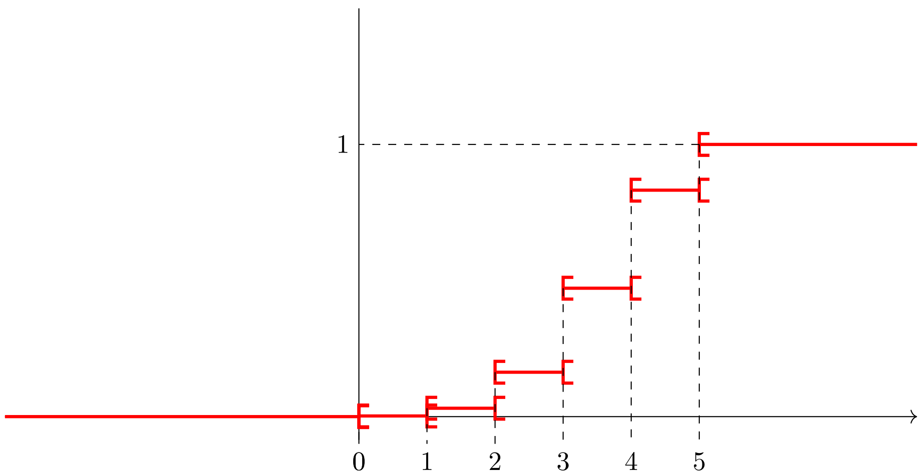
On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ pour signifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

Remarque 21 (Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée). On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession de n épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer n épreuves de Bernoulli indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres) et de même paramètre p. Alors la v.a.r. donnant le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

Exemple 11.

1. On considère une pièce de monnaie donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$. L'expérience consiste en n lancers consécutifs de cette pièce de monnaie. Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^n$. On note X la v.a.r. égale au nombre de Pile obtenus lors de l'expérience.
   Démontrons que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).
   (a) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminons le nombre de n-tirages réalisant $[X = k]$. Un n-tirage réalisant $[X = k]$ est un n-uplet contenant k Pile. Il est entièrement déterminé par la position des k Pile : $\binom{n}{k}$ possibilités. Il y a donc $\binom{n}{k}$ tels tirages.
   Déterminons maintenant la probabilité d'apparition d'un tel n-tirage : à chaque lancer, Pile est obtenu avec probabilité p et Face est obtenu avec probabilité $1 - p = q$. Or, un tel n-tirage contient exactement k Pile et $n - k$ Face. La probabilité d'apparition d'un tel n-tirage est donc : $p^k\ q^{n-k}$. On en déduit que : $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k\ q^{n-k}$.
2. On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. L'expérience consiste à tirer **successivement** n boules **avec remise**. On note X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges tirées. Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{r}{r+v}\right)$ Cet exemple permet de retrouver la formule du binôme de Newton. Comme $([X = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ est le sce associé à X :
   $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = k]) = 1$ donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\dfrac{r}{r+v}\right)^k \left(\dfrac{v}{r+v}\right)^{n-k} = 1$. On en conclut : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k\ v^{n-k} = (r+v)^n}$

Exemple 12 (Fonction de répartition). Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(5, .7)$.



Remarque 22.

- Évidemment, si une variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

- Dans un sujet de concours, on peut avoir à reconnaître une loi classique. On peut, dans le cas de la loi binomiale rédiger comme suit. « La v.a.r. X compte le nombre de succès obtenus au cours d'une répétition de n épreuves de Bernoulli **indépendantes** et **de même paramètre** p. La v.a.r. X suit donc la loi binomiale de paramètre (n,p). »

Théoreme 16. *Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \,]0,1[$).*

1. *Alors X admet une espérance et une variance.*
2. *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = n\ p}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = n\ p\ q} = n\ p\ (1-p)$

Proposition 17. *Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \,]0,1[$). Alors $n - X$ suit la loi binomiale de paramètre (n,q).*

5 Lois discrètes infinies

5.1 Loi géométrique

Definition 12. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On dit que X suit la loi *géométrique* de paramètre $p \in \,]0,1[$ si :

1. $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = p\ q^{k-1}}$ avec $q = 1 - p$

On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour signifier que X suit la loi géométrique de paramètre p.

Remarque 23 (Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée). On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres) et de même paramètre p. Alors la v.a.r. donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p.

Exemple 13.

1. On considère une pièce de monnaie déséquilibrée donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$. L'expérience consiste en n lancers consécutifs de cette pièce de monnaie. Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^{\mathbb{N}^*}$. On note X la v.a.r. égale au rang d'apparition du premier Pile obtenu au cours de l'expérience. Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
   Dans la suite, on considère les événements :
   - P_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer »,
   - F_i : « obtenir Face au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

   Démontrons que X suit la loi géométrique de paramètre p.
   (a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   $$[X = k] = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap P_k$$
   Les lancers étant indépendants, on obtient :
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k) \\ &= p\ q^{k-1} \end{aligned}$$
2. On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. L'expérience consiste au tirage infini d'une boule avec remise. On note X la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la première boule rouge. Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$

Théoreme 18. *Soit X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ($p \in \,]0,1[$). Alors :*

1. *La v.a.r. X admet une espérance et une variance.*

2. $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}} = \frac{1-p}{p^2}$

Proposition 19. *Soit X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ($p \in\ ]0,1[$). Alors pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$:*

1. $\boxed{\mathbb{P}([X > k]) \ = \ q^k}$

2. $\boxed{\mathbb{P}([X > k+\ell]) \ = \ \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])}$

Remarque 24. Comme $[X > k+\ell] \subseteq [X > k]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+\ell]) = \frac{\mathbb{P}([X > k+\ell])}{\mathbb{P}([X > k])} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbb{P}([X > \ell])$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $X > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**.

Exercice 2 : Soit X une v.a.r. telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in\ ]0,1[$.

1. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

2. En déduire que : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$.
3. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de cette formule.

Démonstration. 1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La v.a.r. X est à valeurs entières. On en déduit :

$$[X > k-1] = [X = k] \cup [X > k]$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

et ainsi : $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$.

2. La v.a.r. X admet une espérance car elle suit une loi géométrique. Par définition $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k])$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Considérons la somme partielle $\sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X = k])$ correspondante.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\Big(\ \mathbb{P}([X > k-1]) - \ \mathbb{P}([X > k])\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X > k-1]) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X > k]) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\ \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X > k]) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X > k]) \\
&= 0 \times \mathbb{P}([X > 0]) + \sum_{k=1}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X > k]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X > k] + N\mathbb{P}([X > N])\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) - N\ \mathbb{P}([X > N]) \\
&= -\,N\ q^N \ + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k])
\end{aligned}$$

Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) = \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X = k]) + N\ q^N$. Les membres à droite de l'égalité admettent une limite. Plus précisément :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} N\ q^N = 0$$

On en déduit que le membre de gauche admet une limite et :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) = \mathbb{E}(X)$$

3. D'après ce qui précède : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$.

□

5.2 Loi de Poisson

Definition 13. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A})$. On dit que X suit la loi *de Poisson* de paramètre $\lambda > 0$ si :

1. $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ \boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}}$

On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Exemple 14. Le `BO` suggère d'introduire la loi de Poisson comme loi limite. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. On a alors, pour tout $k \leq n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n = k]) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{\lambda^k}{n^k}\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\ \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous aux termes de ce produit.

- $\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{n^k} = 1$
  En effet, le numérateur apparaît comme produit de k éléments qui sont tous équivalents, lorsque n tend vers $+\infty$, à n.
- Notons $u_n = \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)\right)$. Or :

  $$\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ \frac{-\lambda}{n} = -\lambda$$

  (c'est une instance de la propriété : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$*)*

  D'où : $\ln(u_n) \to -\lambda$ et $u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$.
- Enfin, comme $1 - \dfrac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])}$$

où X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Théoreme 20. *Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Alors :*

1. *La v.a.r. admet une espérance et une variance.*
2. $\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \lambda}$

Exemple 15. La loi de Poisson est généralement utilisée comme loi de v.a.r. consistant à calculer le nombre d'événements d'un certain type se produisant sur un laps de temps donné. Cette modélisation est valide si :

1. les événements se produisant sont indépendants,
2. la probabilité d'apparition du phénomène dans un laps de temps donné T ne dépend que de cette durée T.

Par exemple :

- On considère une autoroute pour laquelle il y a en moyenne 1.8 accidents par semaine. On note X la v.a.r. donnant le nombre d'accidents par semaine sur cette autoroute. On peut considérer $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1.8)$. *(notez que λ n'est pas forcément entier)*
- On considère un livre contenant des fautes d'impression. On sait de plus qu'il y a en moyenne 0.8 faute d'impression par page. On note X le nombre de fautes d'impression sur une page de ce livre. On peut considérer $X \hookrightarrow \mathcal{P}(0.8)$.
- On considère un serveur téléphonique qui reçoit en moyenne trois appels toutes les minutes. On note X le nombre d'appels reçus par le serveur en une minute. On peut considérer $X \hookrightarrow \mathcal{P}(3)$.