Table des matières

1 Notion de variable aléatoire réelle

Definition 1. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
On dit que X est une *variable aléatoire réelle* (v.a.r.) définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :

- X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ ($X : \Omega \to \mathbb{R}$).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$ est un événement, autrement dit un élément de la tribu $\mathscr{A}$.

Si X est une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$, on note

- $[X \leqslant x] \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}$
- $X(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$

Il faut interpréter $X(\Omega)$ comme l'ensemble des **valeurs** que peut prendre la v.a.r. X.

Le terme de « variable aléatoire réelle » peut paraître trompeur :

- X n'est pas une variable, c'est une application !
- X n'a rien d'aléatoire, la notion de probabilité n'entre même pas en jeu dans sa définition ! Ce qui est aléatoire, c'est l'issue ω de l'expérience et donc la valeur prise par X à l'issue de l'expérience (qui n'est autre que $X(\omega)$).

Dans ce chapitre, on change de point de vue. On s'intéressait auparavant aux événements (des **ensembles**), on s'intéresse maintenant aux v.a.r. (des **applications**). Ces v.a.r. créent naturellement une grande famille d'événements : les événements $[X \in B]$ où B est une partie « raisonnable » de $\mathbb{R}$. Les v.a.r. sont donc des « machines à produire des événements » et permettent bien souvent d'avoir une écriture très compacte d'événements à priori un peu compliqués.

Cela veut dire qu'il va falloir s'habituer à un nouveau **formalisme** (une nouvelle manière de représenter les événements), mais les outils resteront les mêmes (essentiellement : formule des probabilités totales, formule des probas composées, thm de la limite monotone, formule de Bayes).

Exemple 1. On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à effectuer 2 lancers successifs d'un même dé à 6 faces.

- $\Omega = [\![1, 6]\!]^2 = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$.
- L'univers Ω étant fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- On considère la v.a.r. X égale à la somme des deux résultats obtenus :

$$X \ : \ \left| \begin{array}{ccc} [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] & \to & \mathbb{R} \\ (i \ , \ j) & \mapsto & i+j \end{array} \right.$$

  Cette variable aléatoire est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Calculons précisément $X(\Omega)$.
  La plus petite valeur que peut prendre la v.a.r. X est $m =$ **2**.
  La plus grande valeur que peut prendre la v.a.r. X est $M =$ **12**.
  Toute valeur k comprise entre m et M peut également être prise par X.
  D'où $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

- L'ensemble $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 4\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$ est bien un événement. Décrire A à l'aide d'une phrase :

  A : « **la somme des deux dés est inférieure ou égale à** 4 »

  A l'écrit, on utilisera la notation simple et efficace $[X \leqslant 4]$ pour désigner cet événement.
  A l'oral, on dira : « l'événement X prend une valeur inférieure ou égale à 4 » pour désigner cet événement.
- L'ensemble $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$ est un événement. En effet, c'est le complémentaire de $[X \leqslant 10]$.
  Décrire B à l'aide d'une phrase :

  B : « **la somme des deux dés est strictement supérieure à** 10 »

  En utilisant les issues, on peut écrire que $B = \{(5,6),(6,6),(6,5)\}$.
  La notation à privilégier est celle construite à l'aide de la v.a.r. X. On notera : $B = [X > 10]$.
- On peut considérer beaucoup d'autres événements, par exemple :
  a) $[2 < X \leqslant 7] = [X > 2] \cap [X \leqslant 7]$
  b) $[2 \leqslant X < 7] = [X \geqslant 2] \cap [X < 7]$
  c) $[X = 3] = [X \leqslant 3] \cap [X \geqslant 3]$
  d) $[2,3 \leqslant X < 7,5] = [3 \leqslant X \leqslant 7]$ (car X ne prend que des valeurs entières)
  e) $\left[-32 \leqslant X < \mathrm{e}^{27}\right] = [2 \leqslant X \leqslant 12] = \Omega$ (car X ne prend que des valeurs entières entre 2 et 12)

Théoreme 1. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathscr{A}$.*
En particulier, les ensembles suivants sont des événements (où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) :
- $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$
- $[X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\} = \overline{[X \leqslant x]}$
- $[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]$
- $[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\} = \overline{[X < x]}$
- $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = [X \leqslant x] \cap [X \geqslant x]$
- $[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leq X(\Omega) \leqslant y\} = [X \leqslant y] \cap [X \geqslant x]$
- *etc*

2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Definition 2. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle.
On appelle *fonction de répartition de X* et on note F_X l'application :

$$\boxed{F_X \ : \left| \begin{array}{lcc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array} \right.}$$

On retiendra la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x])$$

Théoreme 2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes :*
1. *$\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.*
2. *La fonction F_X est croissante.*
3. *$\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$*
4. *La fonction F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)}$$

5. La fonction F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])}$$

Corollaire 3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$\boxed{F_X \text{ est continue en } x \iff \mathbb{P}([X = x]) = 0}$$

Proposition 4. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.*

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a)}$$

Remarque 1. On fera attention au fait qu'une inégalité est large tandis que l'autre est stricte dans cette formule.

3 Loi d'une variable aléatoire

Definition 3 (définition informelle de la loi dans le cas général, hors-programme)**.** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *loi de X* la donnée de toutes les probabilités $\mathbb{P}([X \in A])$ où A est une partie « raisonnable » de $\mathbb{R}$.

Théoreme 5. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Les v.a.r. X et Y ont même fonction de répartition si et seulement si X et Y suivent la même loi. Autrement dit, la fonction de répartition d'une v.a.r.* ***caractérise*** *sa loi. Ou bien encore, la loi d'une v.a.r. X est entièrement déterminée par sa fonction de répartition F_X.*

4 Indépendance de variables aléatoires

4.1 Indépendance de deux variables aléatoires

Definition 4. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.
Les v.a.r. X et Y sont dites *indépendantes* (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si pour tout intervalles I et J de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}([X \in I]) \times \mathbb{P}([Y \in J])$$

Autrement dit, les v.a.r. X et Y sont indépendantes si pour tout intervalles I et J de $\mathbb{R}$, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont **indépendants**.

4.2 Indépendance mutuelle de variables aléatoires

Definition 5. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Soit $n \geqslant 2$. Les v.a.r. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont *(mutuellement) indépendantes* si, pour tout intervalles I_1, …, I_n de $\mathbb{R}$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \in I_i])$$
- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. *(mutuellement) indépendantes* si :

pour tout $n \geqslant 2$, les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Théoreme 6 (Lemme des coalitions)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Soient $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes.*

Exemple 2. Si X et Y sont indépendantes, alors X^2 et Y^3 sont également indépendantes.

Théoreme 7 (Lemme des coalitions). *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soient* $X_1, \ldots, X_n$ *des v.a.r. . Soient* $f_1 : X_1(\Omega) \to \mathbb{R}, \ldots, f_n : X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ *des fonctions.*

- *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes, alors* $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ *sont mutuellement indépendantes.*
- *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont discrètes et mutuellement indépendantes, alors toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r.* $X_1, \ldots, X_p$ *est indépendante de toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r.* $X_{p+1}, \ldots, X_n$ *(pour* $p \in [\![2, n-1]\!]$*).*

Exemple 3. Soient $X_1, \ldots, X_5$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :

- les v.a.r. X_1, X_2^2, $2\,X_3$, $e^{X_4} - 1$ et $|X_5|$ sont mutuellement indépendantes.
- les v.a.r. $2\,X_1 X_3 - X_5$ et X_2^2 sont indépendantes.
- les v.a.r. $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_3, X_4, X_5)$ sont indépendantes.

4.3 Lien entre indépendance et espérance

Théoreme 8 (Espérance d'un produit). *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles. On suppose que* X *et* Y *sont indépendantes et admettent chacune une espérance. Alors la v.a.r.* XY *admet une espérance et*

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)}$$

Remarque 2. Attention, la réciproque est fausse.

Remarque 3. On s'en fiche si on ne sait pas définir $\mathbb{E}(XY)$!

Exemple 4. On considère X et Y deux v.a.r. indépendantes qui suivent toutes les deux la loi $\mathcal{B}(p)$ ($p \in]0, 1[$).

Alors $\mathbb{E}(XY) = \underline{\quad p^2 \quad}$.

Attention, ce n'est pas parce que Y suit la même loi que X que l'on peut remplacer Y par X dans le calcul d'espérance. En effet, X^2 suit également la loi $\mathcal{B}(p)$ et donc $\mathbb{E}(X^2) = p \neq \mathbb{E}(XY)$. On ne trouve pas le même résultat.

A retenir :

$$\boxed{\text{« } Y \text{ suit la même loi que } X \text{ »} \neq \text{« } Y = X \text{ »}}$$

4.4 Lien entre indépendance et variance

Théoreme 9 (Variance d'une somme). *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles. On suppose que* X *et* Y *sont indépendantes et admettent chacune un moment d'ordre* 2*. Alors la v.a.r.* $X + Y$ *admet une variance et*

$$\boxed{\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$$

Remarque 4. Attention, la réciproque est fausse.

Remarque 5. On s'en fiche si on ne sait pas définir $\mathbb{V}(X + Y)$!

Exemple 5. On considère X et Y deux v.a.r. indépendantes qui suivent toutes les deux la loi $\mathcal{B}(p)$ ($p \in]0, 1[$).

Alors $\mathbb{V}(X + Y) = \underline{\quad 2p(1-p) \quad}$.

Attention, ce n'est pas parce que Y suit la même loi que X que l'on peut remplacer Y par X dans le calcul de variance. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X + X) &= \mathbb{V}(2X) \\ &= 4\mathbb{V}(X) \\ &= 4p(1-p) \neq \mathbb{V}(X + Y) \end{aligned}$$

A retenir :

$$\boxed{\text{« } Y \text{ suit la même loi que } X \text{ »} \neq \text{« } Y = X \text{ »}}$$