

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats, dont voici le protocole :

- On place un rat devant  $n$  couloirs.
- Au bout de l'un d'eux se trouve sa nourriture préférée, tandis qu'au bout des autres, il n'y a rien.
- Le rat teste aléatoirement les couloirs jusqu'à ce qu'il trouve la nourriture. A chaque fois que le rat teste un couloir, on dit que le rat fait un *trajet*, même si il avait déjà testé ce couloir précédemment.
- L'expérience s'arrête lorsque le rat trouve la nourriture pour la première fois.

On note  $R_n$  : « le rat trouve la nourriture en moins de  $n$  trajets ».

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  : « le rat trouve la nourriture lors du  $k^{\text{e}}$  trajet ».

On note  $(H_m)$  l'hypothèse : le rat se souvient exactement des  $m$  derniers trajets mais pas de ceux d'avant.

1. Justifier que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_k = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$ .

Autrement dit, les événements « le rat trouve la nourriture lors du  $k^{\text{e}}$  trajet » et « le rat trouve la nourriture pour la première fois lors du  $k^{\text{e}}$  trajet » coïncident.

On se place dans le cas  $n = 3$ .

2. Calculer, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(A_k)$  puis en déduire  $\mathbb{P}(R_n)$  dans chacun des cas suivants :
  - (a) sous l'hypothèse  $(H_0)$  (le rat n'a aucun souvenir des trajets précédents).
  - (b) sous l'hypothèse  $(H_1)$  (le rat se souvient uniquement du dernier trajet).
  - (c) sous l'hypothèse  $(H_2)$  (le rat se souvient exactement des deux derniers trajets).

On pourra présenter les résultats dans un tableau récapitulatif.

3. Les chercheurs possèdent trois rats. Le premier à une mémoire  $(H_0)$ , le deuxième une mémoire  $(H_1)$  et le dernier une mémoire  $(H_2)$ . Calculer  $\mathbb{P}(R_n)$  en supposant que le rat est choisit au hasard parmi les trois.

On revient au cas général ( $n \geq 1$  et  $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ) et on suppose que l'hypothèse  $(H_m)$  est vérifiée.

4. Donner, en justifiant brièvement, la valeur de  $\mathbb{P}(R_n)$  dans le cas où  $m = n-1$ .
5. On suppose dans cette question que  $m \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ .
  - (a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\mathbb{P}(A_k)$  en séparant les cas  $1 \leq k \leq m+1$  et  $m+2 \leq k \leq n$ .
  - (b) En déduire  $\mathbb{P}(R_n)$ .
  - (c) Montrer que la formule obtenue reste valable pour  $m = n-1$ .
6. On fixe l'entier  $m$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1 - e^{-1}$ . (On donne  $1 - e^{-1} \approx 0,63$ )

Des rats d'un autre genre.

7. Les chercheurs ont trouvé comment créer des X-rats<sup>©</sup>, capables d'accroître leurs capacités de mémoire à l'infini en s'entraînant dans des labyrinthes toujours plus grand. Leur rat le plus performant, baptisé Gauss, à une mémoire de type  $(H_m)$  où  $m = \lfloor \alpha n \rfloor$  avec  $\alpha \in ]0, 1[$  ( $\alpha$  est fixé).

On suppose que c'est le X-rat<sup>©</sup> Gauss qui participe à l'expérience dans cette question.

- (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1 - (1 - \alpha)e^{-1}$ .
- (b) En déduire la valeur minimale pour  $\alpha$  si l'on souhaite que le X-rat<sup>©</sup> Gauss réussisse à trouver la nourriture en moins de  $n$  trajets plus de 9 fois sur 10 lorsque  $n$  est très grand.

Partie informatique.

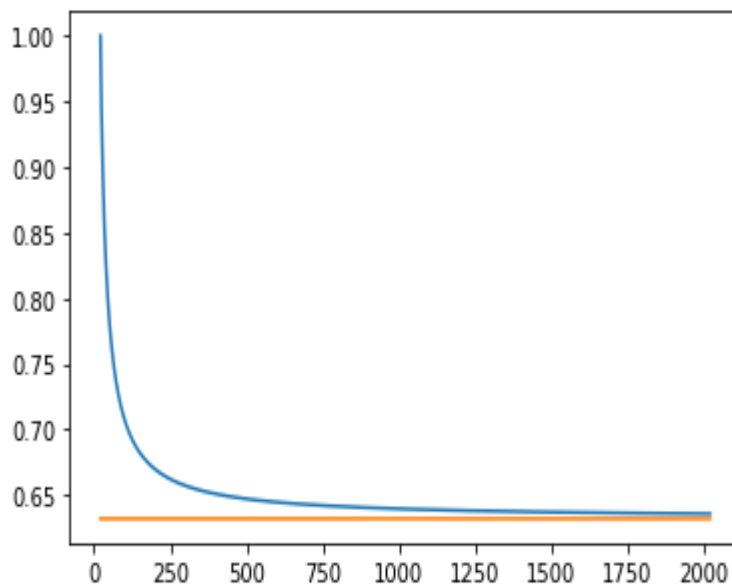
8. Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il trace les 2000 premiers termes de la suite  $(\mathbb{P}(R_n))_{n \geq 21}$  sous l'hypothèse  $H_{20}$ .

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 A = [n for n in range(21,2022)]
4 C = [1-np.exp(-1) for n in A]
5 m = 20
6 U = _____
7 plt.plot(A,U)
8 plt.plot(A,C)

```

On obtient le tracé :



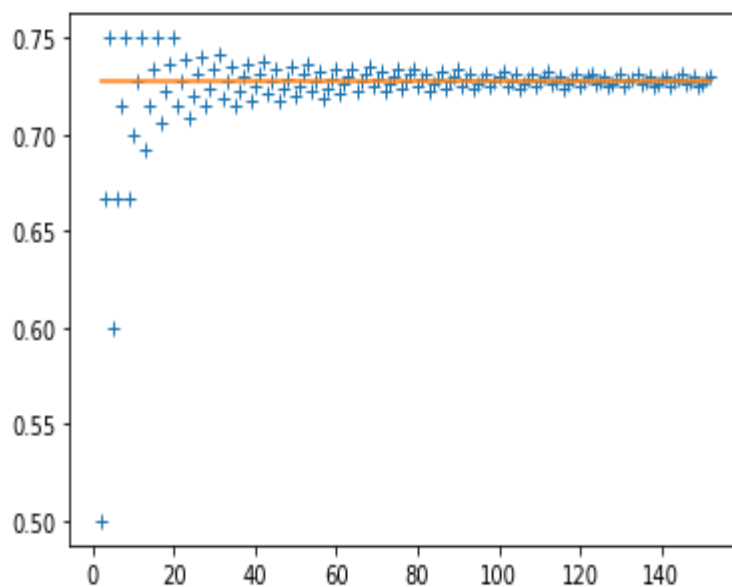
Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

9. Ecrire une fonction en **Python**, nommée **PlusPetitReussite**, qui prend en argument un entier  $n \geq 1$  et qui renvoie le plus petit entier  $m$  vérifiant :  $\mathbb{P}(R_n) \geq \frac{9}{10}$  sous l'hypothèse  $(H_m)$ .  
 Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $u_n$  cet entier  $m$  minimal.
10. On affiche ci-dessous le tracé obtenu en utilisant le programme **Python** suivant :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 A = [n for n in range(2,153)]
4 C = [1-np.exp(1)/10 for n in A]
5 U = [PlusPetitReussite(n)/n for n in A]
6 plt.plot(A,C)
7 plt.plot(A,U,"+")

```



Que conjecturez-vous comme équivalent de  $u_n$  ?