DS2 (vA)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. On note I la matrice identité $M(1,0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ puis donner la dimension de E.

2. ***a)*** Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F puis donner la dimension de F.

b) Montrer que l'ensemble $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G puis donner la dimension de G.

3. ***a)*** Montrer que $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ de F et de la base $\mathscr{B}_2$ de G forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$.

4. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

c) Prouver que $\big(M(a,b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a,b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a,b)\big)^2 = I$$

Exercice 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \frac{x\,\ln(x) - 1}{x}$$

I. Étude de φ

1. ***a)*** Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

b) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. ***a)*** Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer, pour tout $x > 0$, $\varphi'(x)$.

c) Calculer, pour tout $x > 0$, $\varphi''(x)$. Que peut-on en déduire ?

3. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

4. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi(\alpha) = 0$$

Justifier que $\alpha \in [1, \mathrm{e}]$.

5. Tracer le graphe de φ.

II. Étude d'une suite réelle

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{e} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n \end{cases}$$

6. Démontrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.

7. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?

8. Prouver que la suite u est strictement croissante.

9. La suite u est-elle convergente ?

10. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle prenne en argument un réel A et qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$:

```
def plusPetitEntier(A) :
    u = np.e
    n = 0
    while _________ :
        u = _________________________________
        n = _________
    return _____
```

Exercice 3

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.
On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

La suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n \;=\; \mathbb{P}(U_n) \qquad \text{et} \qquad a_n \;=\; \mathbb{P}(\,[X=n]\,)$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X=2]$, $[X=3]$ et $[X=4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k.
En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.

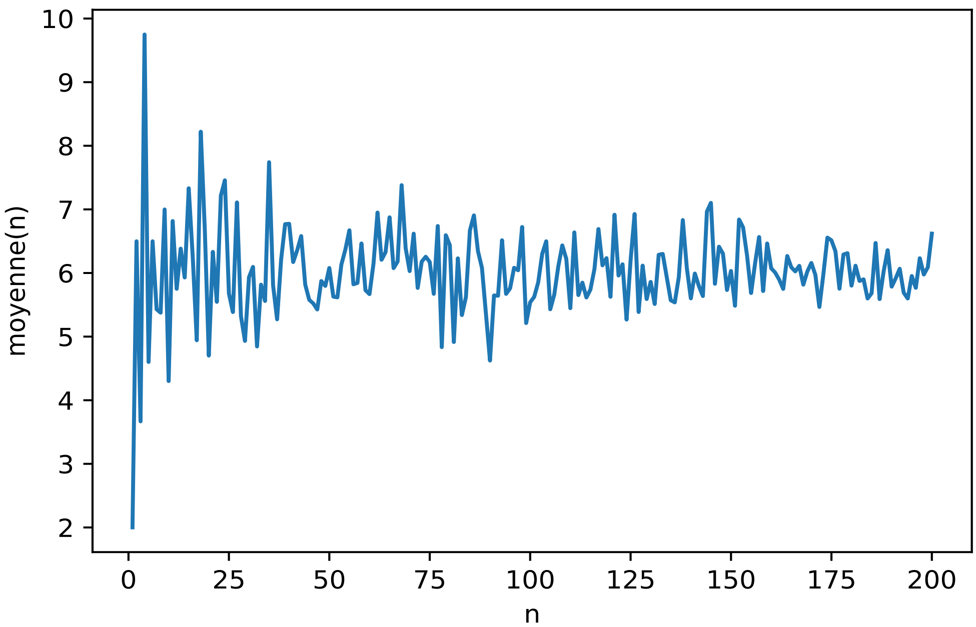
2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$.

3. ***a)*** Recopier et compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile _______:
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile + 1
        else:
            pile = _____
        tirs = ____________
    return tirs
```

b) Écrire une fonction **Python** nommée `moyenne(n)` qui simule `n` fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

c) `(CUBES UNIQUEMENT)` On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier `n` de $[\![1, 200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

4. a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} \;=\; (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} \;=\; u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

6. En déduire :

$$\mathbb{P}(\,[X = -1]\,) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) \;=\; 0$$

(Indication : utiliser le théorème de la limite monotone)

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n \;=\; 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad S_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} k\,\mathbb{P}(\,[X = k]\,)$$

7. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} \;=\; \frac{1}{8}\,v_{n-2}$$

8. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(\,[X = n+1]\,) \;=\; v_n - v_{n+1}$$

9. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n \;=\; 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n$$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et majorée.

11. Montrer que X admet une espérance.

12. ***a)*** Démontrer que la suite $(n\,v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers un réel λ.

b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontrée à la question ***7.***, obtenir une contradiction.

c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.