DS2 (vA) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1 (ECRICOME 2008)

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. On note I la matrice identité $M(1,0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ puis donner la dimension de E.

- **2 pts :** $E = \text{Vect}(I, A)$
- **1 pt :** (I, A) **est libre**
- **1 pt :** $\dim(E) = 2$

2. a) Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F puis donner la dimension de F.

- **1 pt : écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt : résolution** $\left\{ x = y + 2z \right.$
- **1 pt : écriture sous forme de sev engendré :** $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
- **1 pt : La famille** $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ **est libre**
- **1 pt :** $\dim(F) = 2$

b) Montrer que l'ensemble $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G puis donner la dimension de G.

- **1 pt : écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & 4y & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt : résolution** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -2z \end{array}\right.$
- **1 pt : écriture sous forme de sev engendré :** $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

- **1 pt : La famille** $\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ **est libre**

- **1 pt :** $\dim(G) = 1$

3. ***a)*** Montrer que $F \cap G = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

- **1 pt :** $\supset$
- **2 pts :** $\subset$

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ de F et de la base $\mathscr{B}_2$ de G forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- **2 pts :** $\mathscr{B}$ **libre**
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **a pour coordonnées** $(1,0,0)$ **dans** $\mathscr{B}$**.**
- **2 pts :** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **a pour coordonnées** $(5,-1,2)$ **dans** $\mathscr{B}$**.**

4. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

- **3 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\-2 & 3 & 4\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

- **1 pt :** $AP = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\4 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\-2 & 3 & 4\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale.

- **1 pt :** $M(a,b) = a \cdot I + b \cdot A$
- **1 pt :** $D(a,b) = a \cdot I + b \cdot D$

b) Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

- 2 pts : $M(a,b)$ **inversible** $\Leftrightarrow$ $D(a,b)$ **inversible (1 pt par implication)**

- 1 pt : $M(a,b)$ **inversible ssi** $\begin{cases} a+2b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{cases}$

c) Prouver que $\big(M(a,b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a,b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a,b)\big)^2 = I$$

- 2 pts : $\big(M(a,b)\big)^2 = I \;\Leftrightarrow\; \big(D(a,b)\big)^2 = I$

- 1 pt : obtention 4 systèmes

- 2 pts : résolutions (1/2 pt par système) : $M(1,0)$, $M(-3,2)$, $M(3,-2)$ **et** $M(-1,0)$

Exercice 2 (ECRICOME 2013)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \frac{x\ \ln(x) - 1}{x}$$

I. Étude de φ

1. a) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

- 1 pt : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ **par croissances comparées**

- 1 pt : $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$

- 1 pt : Interprétation graphique : le graphe de φ admet une asymptote verticale en 0.

b) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- 1 pt : $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$

- 1 pt : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

c) Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- 1 pt : $\dfrac{\varphi(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$

- 1 pt : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$ **par croissances comparées**

2. a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 1 pt :

0 **pt si oubli du fait que le dénominateur ne s'annule pas**

b) Calculer, pour tout $x > 0$, $\varphi'(x)$.

- 1 pt : $\varphi'(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

c) Calculer, pour tout $x > 0$, $\varphi''(x)$. Que peut-on en déduire ?

- 1 pt : $\varphi''(x) = -\dfrac{x+2}{x^3}$

- 1 pt : la fonction φ est (strictement) concave sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

- 1 pt :

x	0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	‖	$+$	
Variations de φ	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

4. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

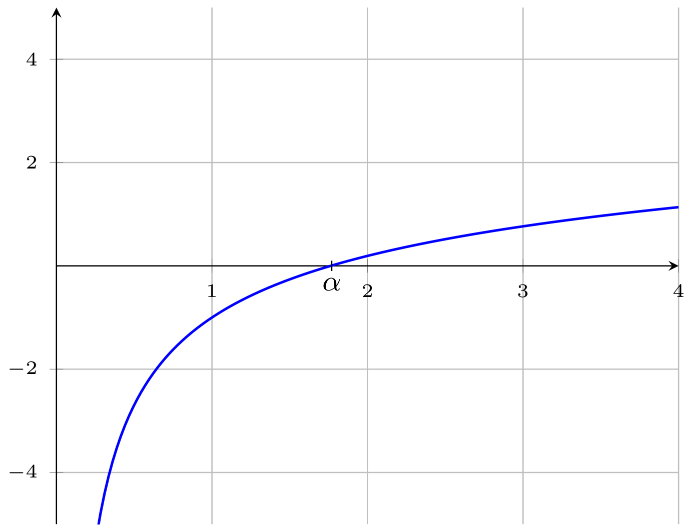
$$\varphi(\alpha) = 0$$

Justifier que $\alpha \in [1, e]$.

- **1 pt : La fonction φ est :**
  - **continue sur** $]0, +\infty[$
  - **strictement croissante sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : elle réalise une bijection de** $]0, +\infty[$ **sur** $\varphi(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$
- **1 pt :** $0 \in]-\infty, +\infty[$
- **1 pt :** $\alpha \in [1, \mathbf{e}]$

5. Tracer le graphe de φ.

- **1 pt : le graphe est cohérent avec la croissance**
- **1 pt : le graphe est cohérent avec la concavité**
- **1 pt : le graphe est cohérent avec les limites**
- **1 pt : le graphe est cohérent avec le point α où f s'annule**



II. Étude d'une suite réelle

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{e} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n \end{cases}$$

6. Démontrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**
- **1 pt : partie existence de la preuve bien rédigée**

7. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?

- **1 pt :** $L \geqslant \alpha > 0$
- **1 pt :** $L = \alpha$

8. Prouver que la suite u est strictement croissante.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > 0$

9. La suite u est-elle convergente ?

- 1 pt : raisonnement par l'absurde bien écrit

- 2 pts : contradiction $\alpha = L \geqslant \mathbf{e} > \alpha$

10. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle prenne en argument un réel A et qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$:

```
def plusPetitEntier(A) :
    u = np.e
    n = 0
    while  u < A  :
        u =   (u * np.log(u) - 1) / u + u
        n =  n + 1
    return  n
```

- 5 pts total :

- **1 pt par ligne**
- **1 pt bonus si tout est juste**

Exercice 3 (ECRICOME 2021)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.
On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

La suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n \ = \ \mathbb{P}(U_n) \qquad \text{et} \qquad a_n \ = \ \mathbb{P}(\,[X = n]\,)$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k.
En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.

- **1 pt :** $a_2 = \dfrac{1}{4}$ $([X = 2] = P_1 \cap P_2)$
- **1 pt :** $a_3 = \dfrac{1}{8}$ $([X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3)$
- **1 pt :** $a_4 = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ $([X = 4] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4))$
- **1 pt : argument d'indépendance**
- **1 pt : argument d'incompatibilité**

2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$.

- **1 pt :** $U_n = \bigcup\limits_{k=2}^{n} [X = k]$
- **1 pt : argument d'incompatibilité**

3. a) Recopier et compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile  < 2 :
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile + 1
        else:
            pile = 0
        tirs = tirs + 1
    return tirs
```

- **4 pts total :**
  - **1 pt par ligne**
  - **1 pt bonus si tout est juste**

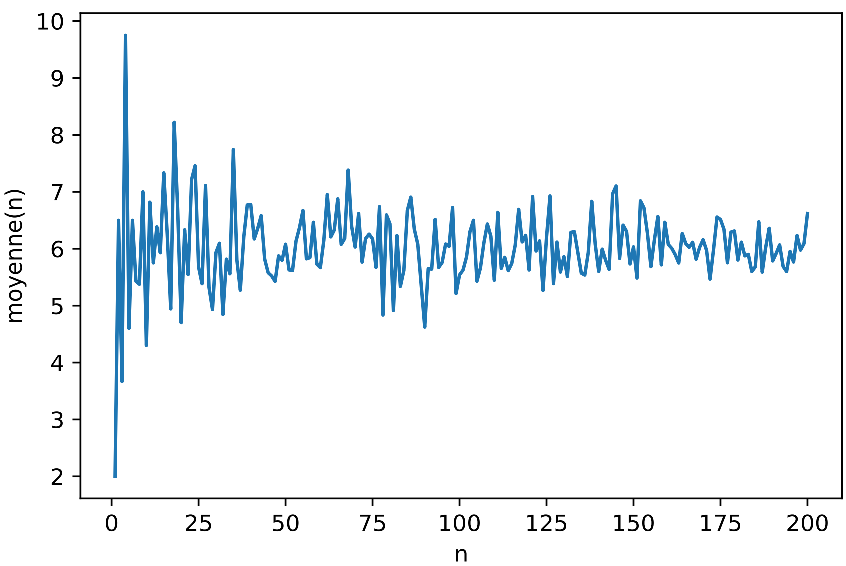
b) Écrire une fonction **Python** nommée `moyenne(n)` qui simule `n` fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

- **5 pts total :**

```
def moyenne(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + simulX()
    return S/n
```

- **1 pt :** `S = 0`
- **1 pt :** `for k in range(n):`
- **1 pt :** `S = S + simulX()`
- **1 pt :** `return S/n`
- **1 pt bonus si tout est correct**

c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier `n` de $[\![1, 200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

- 1 pt : $\mathbb{E}(X) \approx 6$

- 1 pt : Loi faible des grands nombres

Partie B

4. a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

- 1 pt : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$

- 1 pt : formule du crible

b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} \;=\; (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

- 1 pt : $U_n \cap B_{n+1} = \big(U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}\big) \cup \big(U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}\big)$

- 1 pt : $U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$

- 1 pt : $U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1} = B_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} \;=\; u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$

- 1 pt : Comme les lancers sont indépendants, les événements U_{n-2} et $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ sont indépendants

- 1 pt : argument d'incompatibilité

- 1 pt : calcul correct

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n \;=\; \dfrac{1}{8}\,(1 - u_{n-2}) \geqslant 0$ **car** $u_{n-2} = \mathbb{P}(U_{n-2}) \leqslant 1$

- 1 pt : suite croissante et majorée + thm de convergence monotone

- 1 pt : $\ell = \ell + \dfrac{1}{8}\,(1 - \ell)$ **donc** $\ell = 1$

6. En déduire :

$$\mathbb{P}(\,[X = -1]\,) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) \;=\; 0$$

- 1 pt : $[X = -1] \;=\; \displaystyle\bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{U_k}$

- 1 pt : $\mathbb{P}([X = -1]) = 1 - \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right)$

- 1 pt : La suite (U_n) est une suite croissante d'événements

- 1 pt : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right) = \lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n \;=\; 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad S_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} k\,\mathbb{P}(\,[X = k]\,)$$

7. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} \;=\; \frac{1}{8}\, v_{n-2}$$

- **1 pt : calcul correct**

8. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(\,[X = n+1]\,) \;=\; v_n - v_{n+1}$$

- **1 pt :** $U_{n+1} \;=\; U_n \cup [X = n+1]$
- **1 pt : Les événements $[X = n+1]$ et U_n sont de plus incompatibles puisqu'on ne peut obtenir pour la première fois deux « Pile » consécutifs au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer et à la fois les avoir obtenus au cours des n premiers lancers**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = n+1]) \;=\; \mathbb{P}(U_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n) \;=\; u_{n+1} - u_n \;=\; (1 - v_{n+1}) - (1 - v_n) \;=\; v_n - v_{n+1}$

9. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n \;=\; 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$$

- **3 pts : initialisation pour $n = 2$**
  - **1 pt :** $S_2 \;=\; \sum_{k=2}^{2} k\,\mathbb{P}([X = k]) \;=\; 2\,\mathbb{P}([X = 2]) \;=\; 2 \times \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2}$
  - **1 pt :** $v_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
  - **1 pt :** $v_4 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- **2 pts : hérédité**

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et majorée.

- **1 pt : La suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} k\,\mathbb{P}([X = k])$. Or cette série est à termes positifs. Donc $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante**
- **1 pt :** $S_n \leqslant 6$

11. Montrer que X admet une espérance.

- **1 pt : La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum k\,\mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente**
- **1 pt : (S_n) converge par thm de convergence monotone donc la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} k\,\mathbb{P}([X = k])$ converge**

12. ***a)*** Démontrer que la suite $(n\, v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers un réel λ.

- **1 pt :** $n\, v_n \;=\; 6 - 8\, v_{n+2} - S_n$

- 1 pt : (S_n) converge et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontrée à la question ***7.***, obtenir une contradiction.

- 1 pt : si $\lambda \neq 0$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ et donc la série $\sum v_n$ diverge par critère de Riemann

- 1 pt : or, la série $\sum v_n$ converge (télescopage cf question *7*)

- 1 pt : qualité de la rédaction

c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.

- 1 pt : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 6 - 8\times 0 - 0 = 6$

- 1 pt : $\mathbb{E}(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 6$