DS2 (vA) - Correction

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1 (ECRICOME 2008)

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ puis donner la dimension de E.

Démonstration.

- On remarque :

$$\begin{aligned} E &= \left\{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a\,I + b\,A \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}\,(I, A) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- Ici, E est un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Il y a tout lieu de penser que cet ensemble va pouvoir facilement s'écrire comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Cette méthode présente un double avantage. En effet, en plus de démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on obtient de plus que la famille $\mathcal{F} = (I, A)$ est génératrice de E. Ainsi :
  - × si $\mathcal{F}$ est une famille libre, c'est alors une base de E.
  - × si $\mathcal{F}$ est une famille liée, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{G}$ de E. La famille $\mathcal{G}$ n'est autre que la famille $\mathcal{F}$ dans laquelle on a retiré tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

- La famille $\mathcal{F} = (I, A)$:
  - × engendre E
  - × est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires
- On peut donc conclure que $\mathcal{F}$ est une base de E et

$$\boxed{\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2}$$

□

Commentaire

- Si la rédaction précédente est celle attendue, il arrive parfois qu'on ne puisse pas l'utiliser (dans certains cas, l'ensemble étudié ne s'écrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie). Il est donc important de savoir utiliser la méthode consistant à revenir à la définition de sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $E \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

(ii) $E \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$.

(iii) Démontrons que E est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(U, V) \in E^2$.

× Comme $U \in E$, il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U = M(a_1, b_1)$.

× Comme $V \in E$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U = M(a_2, b_2)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
& \lambda \cdot U + \mu \cdot V \\
= \ & \lambda \cdot M(a_1, b_1) + \mu \cdot M(a_2, b_2) \\
= \ & \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 + 2b_1 & -b_1 & -2b_1 \\ 2b_1 & a_1 - b_1 & -4b_1 \\ -b_1 & b_1 & a_1 + 3b_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 + 2b_2 & -b_2 & -2b_2 \\ 2b_2 & a_2 - b_2 & -4b_2 \\ -b_2 & b_2 & a_2 + 3b_2 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 + 2\lambda\, b_1 & -\lambda\, b_1 & -2\lambda\, b_1 \\ 2\lambda\, b_1 & \lambda\, a_1 - \lambda\, b_1 & -4\lambda\, b_1 \\ -\lambda\, b_1 & \lambda\, b_1 & \lambda\, a_1 + 3\lambda\, b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu\, a_2 + 2\mu\, b_2 & -\mu\, b_2 & -2\mu\, b_2 \\ 2\mu\, b_2 & \mu\, a_2 - \mu\, b_2 & -4\mu\, b_2 \\ -\mu\, b_2 & \mu\, b_2 & \mu\, a_2 + 3\mu\, b_2 \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) + 2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \\ 2\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) - (\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & -4\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \\ -(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) & (\lambda\, a_1 + \mu\, a_2) + 3\,(\lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où : $\lambda \cdot U + \mu \cdot V = M(\lambda\, a_1 + \mu\, a_2, \lambda\, b_1 + \mu\, b_2) \in E$.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

2. a) Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F puis donner la dimension de F.

Démonstration. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
X \in F & \Longleftrightarrow & AX = X \\
& \Longleftrightarrow & (A - I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \; x - y - 2\,z = 0 \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \; x = y + 2\,z \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y + 2z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \; = \; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de F

× libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires

Ainsi, $\mathscr{B}_1 = \mathcal{F}_1$ est une base de F.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim(F) = \mathrm{Card}\big(\mathcal{F}_1\big) = 2.}$$

□

b) Montrer que l'ensemble $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G puis donner la dimension de G.

Démonstration.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
X \in G & \Longleftrightarrow & AX = 2X \\
& \Longleftrightarrow & (A - 2\,I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ -\,x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & z \\ & & y & = & -2\,z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & -\,z \\ & & y & = & -2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
G & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = -2\,z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

- × génératrice de G.
- × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

Ainsi, $\mathscr{B}_2 = \mathcal{F}_2$ est une base de G.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim(G) = \text{Card}\big(\mathcal{F}_2\big) = 1.}$$

□

3. a) Montrer que $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Démonstration.
Par double inclusion.

($\supseteq$)
- Comme $A \times 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ alors $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F$.
- Comme $A \times 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 2 \cdot 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in G$.

Ainsi $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F \cap G$.
(c'est attendu : F et G sont deux sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc contiennent tous les deux $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$)

($\subseteq$) Soit $X \in F \cap G$.
- Comme $X \in F$, $A\,X = X$.
- Comme $X \in G$, $A\,X = 2\,X$.

On en déduit que $X = 2\,X$ et donc que $X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

□

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ de F et de la base $\mathscr{B}_2$ de G forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Montrons que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est bien une famille libre.}}$$

La famille $\mathscr{B}$ est :

× libre,

× telle que : $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B} \text{ est une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

□

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a directement :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Le vecteur } \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } (1,0,0) \text{ dans la base } \mathscr{B}.}$$

- Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Or : $(*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1 \\ \alpha_1 & & & - & 2\,\alpha_3 & = & 1 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \end{array}\right.$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1 \\ & - & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 1 \\ & - & 2\,\alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ & & & & \alpha_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & 2\,\alpha_2 & & = 3 \\ & - & 2\,\alpha_2 & & = 2 \\ & & & \alpha_3 & = 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & & & & = 5 \\ & - & 2\,\alpha_2 & & = 2 \\ & & & \alpha_3 & = 2 \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées } (5,-1,2) \text{ dans la base } \mathscr{B}.}$$

□

4. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

Démonstration.
On procède par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure). De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.
On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4\,L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

□

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} P^{-1}AP & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} P^{-1}M(a,b)P & = & P^{-1}\,(aI + bA)\,P \\ & = & P^{-1}\,aI\,P + P^{-1}\,bA\,P \\ & = & a\,P^{-1}P + b\,P^{-1}AP \\ & = & a\,I + b\,D \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ est bien diagonale.}}$$

□

b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord la caractérisation de l'inversibilité de $M(a, b)$.

($\Rightarrow$) On suppose que $M(a, b)$ est inversible.
Alors, d'après la question ***6.a)*** :

$$D(a,b) \; = \; P^{-1}M(a,b)P$$

$$\boxed{D(a,b) \text{ est inversible comme produit de matrices inversibles.}}$$

($\Leftarrow$) On suppose que $D(a, b)$ est inversible.
Alors, d'après la question ***6.a)*** :

$$M(a,b) \; = \; PD(a,b)P^{-1}$$

$$\boxed{M(a,b) \text{ est inversible comme produit de matrices inversibles.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M(a,b) \text{ est inversible} \Leftrightarrow D(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ est inversible.}}$$

- La matrice $D(a,b)$ est diagonale.
  Elle est donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

$$\boxed{\text{On en conclut : } M(a,b) \text{ est inversible} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{array}\right. .}$$

□

c) Prouver que $\big(M(a,b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a,b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a,b)\big)^2 = I$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\big(M(a,b)\big)^2 = I & \Leftrightarrow \big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big)^2 = I \\
& \Leftrightarrow \big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big)\big(P\,D(a,b)\ P^{-1}\big) = I \\
& \Leftrightarrow P\,D(a,b)\ \big(P^{-1}P\big)\,D(a,b)\ P^{-1} = I \\
& \Leftrightarrow P\,\big(D(a,b)\big)^2\ P^{-1} = I \\
& \Leftrightarrow \big(D(a,b)\big)^2\ P^{-1} = P^{-1}\,I \\
& \Leftrightarrow \big(D(a,b)\big)^2 = P^{-1}\,I\,P \\
& \Leftrightarrow \big(D(a,b)\big)^2 = I
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \big(M(a,b)\big)^2 = I \Leftrightarrow \big(D(a,b)\big)^2 = I.}$$

- Or : $D(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$(D(a,b))^2 = I \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{l} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{l} (a+2b=1)\ \texttt{OU}\ (a+2b=-1) \\ (a+b=1)\ \texttt{OU}\ (a+b=-1) \end{array}\right.$$

  En distinguant les 4 cas possibles, on obtient les 4 systèmes d'équations suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} a+2b=1 \\ a+b=1 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{l} a+2b=1 \\ a+b=-1 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{l} a+2b=-1 \\ a+b=1 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{l} a+2b=-1 \\ a+b=-1 \end{array}\right.$$

- Or : $(S_1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & 1 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right.$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & 1 \\ & - & b & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ & - & b & = & 0 \end{array}\right.$$

Et : $\quad (S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & 1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array}\right.$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & 1 \\ & - & b & = & -2 \end{array}\right.$

$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & -3 \\ & - & b & = & -2 \end{array}\right.$

Puis : $\quad (S_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right.$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ & - & b & = & 2 \end{array}\right.$

$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & 3 \\ & - & b & = & 2 \end{array}\right.$

Enfin : $\quad (S_4) \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array}\right.$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ & - & b & = & 0 \end{array}\right.$

$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & -1 \\ & - & b & = & 0 \end{array}\right.$

Finalement :

$$\big(D(a,b)\big)^2 = I \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{rcl} (a,b) & = & (1,0) \\ (a,b) & = & (-3,2) \\ (a,b) & = & (3,-2) \\ (a,b) & = & (-1,0) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Les matrices } M(a,b) \text{ vérifiant } (M(a,b))^2 = I \text{ sont donc } M\,(1,0)\,,\ M\,(-3,2)\,,\ M\,(3,-2) \text{ et } M\,(-1,0).}$$

Commentaire

- Pour ne pas avoir à résoudre 4 fois le même système (à changement du second membre près), on pouvait le résoudre avec un second membre quelconque. Plus précisément, on pouvait résoudre le système (S) suivant :

$$
\begin{aligned}
(S) \quad & \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2\,b & = & x & & \\ a & + & b & = & & & y \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & 2\,b & = & x & & \\ & - & b & = & -\,x & + & y \end{array}\right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & = & -x & + & 2\,y \\ & - & b & = & -\,x & + & y \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & = & -x & + & 2\,y \\ & & b & = & x & - & y \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

  On obtient ainsi la solution pour n'importe quel couple (x, y) choisi (par exemple, on consdérant $(x, y) = (1, 0)$ on obtient les solution de (S_1)).

- On pouvait aussi rapprocher les résolutions de (S_1) et (S_4) (et la résolution de (S_2) de celle de (S_3)). Si on considère $(\alpha, \beta) = (-a, -b)$ alors :

$$
\begin{aligned}
(S_4) \quad & \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2\,b & = & -1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} -\,a & - & 2\,b & = & 1 \\ -\,a & - & b & = & 1 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha & + & 2\,\beta & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & = & 1 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

  Ce dernier système a pour solution $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et ainsi (S_4) a pour solution $(a, b) = (-1, 0)$.

$\square$

Exercice 2 (ECRICOME 2013)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \frac{x\ \ln(x) - 1}{x}$$

I. Étude de φ

1. a) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

Démonstration. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) - 1 = -1$.
Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
D'où

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty.}$$

Interprétation graphique : le graphe de φ admet une asymptote verticale en 0. □

b) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration. Tout d'abord, $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(x) = +\infty$ et donc $x \ln(x) - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x \ln(x)$.
Il vient

$$\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x \ln(x)}{x} = \ln(x)$$

et donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty}$$

□

c) Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration. D'après les calculs de la question précédente :

$$\frac{\varphi(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x \ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0 \text{ par croissances comparées}}$$

□

2. a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. La fonction φ est de la forme $\varphi = \dfrac{f}{g}$ où :

- $f : x \mapsto x \ln(x) - 1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $g : x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

□

b) Calculer, pour tout $x > 0$, $\varphi'(x)$.

Démonstration. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question ***2.a)***.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On remarque que $\varphi(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x}$. Ainsi,

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}}$$

□

c) Calculer, pour tout $x > 0$, $\varphi''(x)$. Que peut-on en déduire ?

Démonstration. La fonction φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question ***2.a)***.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{x+2}{x^3}}$$

On en déduit que $\varphi''(x) < 0$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est strictement concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

3. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $\varphi'(x) > 0$.
On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	‖	$+$	
Variations de φ	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

□

4. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi(\alpha) = 0$$

Justifier que $\alpha \in [1, e]$.

Démonstration. La fonction φ est :

- continue sur $]0, +\infty[$

- strictement croissante sur $]0, +\infty[$

On en déduit qu'elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$.
Or, $0 \in]-\infty, +\infty[$.
On en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi(\alpha) = 0$$

De plus,
- $\varphi(1) = -1 < 0$
- $\varphi(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}} > 0$

donc

$$\varphi(1) < \varphi(\alpha) < \varphi(\mathrm{e})$$

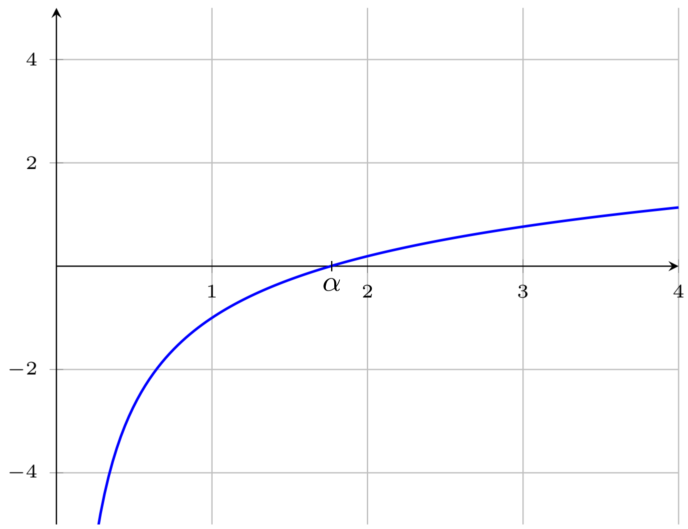
En composant par la bijection réciproque de φ, elle-même strictement croissante, on obtient $1 < \alpha < \mathrm{e}$ et donc

$$\boxed{\alpha \in [1, \mathrm{e}]}$$

$\square$

5. Tracer le graphe de φ.

Démonstration. On obtient le graphe suivant :



$\square$

II. Étude d'une suite réelle

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{e} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n \end{cases}$$

6. Démontrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $\begin{cases} u_n \text{ existe} \\ u_n > \alpha \end{cases}$.

Initialisation :

$u_0 = \mathrm{e}$ donc u_0 existe et $u_0 > \alpha$ d'après la question ***4***. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > \alpha$. Puisque φ est bien définie sur $]0, +\infty[$ et que $u_n > \alpha \geqslant 1 > 0$, il vient que $\varphi(u_n)$ est bien défini et donc u_{n+1} existe.

Ensuite, par croissance de φ, on a $\varphi(u_n) \geqslant \varphi(\alpha) = 0$ et donc

$$u_{n+1} \geqslant u_n > \alpha$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

On a bien montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > \alpha$. □

7. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?

Démonstration. Supposons la suite (u_n) convergente de limite L. Tout d'abord, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$, on obtient par passage à la limite $L \geqslant \alpha > 0$. En particulier, φ est continue en L. Ainsi, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient :

$$L = \varphi(L) + L$$

et donc $\varphi(L) = 0$. Finalement, d'après la question ***4***, cela permet de conclure que

$$\boxed{L = \alpha}$$

□

8. Prouver que la suite u est strictement croissante.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \varphi(u_n) \\ &\geqslant \alpha && \textit{(par croissance de } \varphi \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ &\geqslant 1 && \textit{(cf question 4)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est strictement croissante.}}$$

□

9. La suite u est-elle convergente ?

Démonstration. La suite u est strictement croissante donc

- soit elle est majorée et convergente
- soit elle n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$

Supposons la suite u majorée et convergente. Notons L sa limite. D'après la question ***7***, $L = \alpha$.

Or, la suite u étant croissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 = \mathrm{e}$. Par passage à la limite :

$$\alpha = L \geqslant \mathrm{e} > \alpha$$

c'est absurde. Donc

la suite u n'est pas convergente.

□

10. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle prenne en argument un réel A et qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$:

```
def plusPetitEntier(A) :
    u = np.e
    n = 0
    while _________ :
        u = _____________________________________
        n = __________
    return _____
```

Démonstration. Il s'agit d'un algorithme de recherche du plus petit entier n vérifiant une certaine propriété $\mathcal{P}(n)$.

```
def plusPetitEntier(A) :
    u = np.e
    n = 0
    while u < A :
        u = (u * np.log(u) - 1) / u + u
        n = n + 1
    return n
```

□

Exercice 3 (ECRICOME 2021)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.
On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

La suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n \;=\; \mathbb{P}(U_n) \qquad \text{et} \qquad a_n \;=\; \mathbb{P}(\,[X=n]\,)$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X=2]$, $[X=3]$ et $[X=4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k.
En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.

Démonstration.

- L'événement $[X=2]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux « Pile » consécutifs au $2^{\text{ème}}$ lancer.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X=2] = P_1 \cap P_2.}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} a_2 & = & \mathbb{P}([X=2]) & \\ & = & \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) & \\ & = & \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) & \textit{(car P_1 et P_2 sont indépendants)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } a_2 = \frac{1}{4}.}$$

- L'événement $[X=3]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux « Pile » consécutifs au $3^{\text{ème}}$ lancer. Pour cela, on doit avoir obtenu « Face » au 1^{er} lancer puis 2 « Pile ».
(on ne peut obtenir « Pile » au 1^{er} lancer, sinon les deux « Pile » consécutifs seraient obtenus pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $2^{\text{ème}}$ lancer et non au $3^{\text{ème}}$)

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X=3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3.}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} a_3 & = & \mathbb{P}([X=3]) & \\ & = & \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) & \\ & = & \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(P_3) & \textit{(car } F_1,\ P_2 \textit{ et } P_3 \textit{ sont mutuellement indépendants)} \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } a_3 = \frac{1}{8}.}$$

- L'événement $[X = 4]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux « Pile » consécutifs au $4^{\text{ème}}$ lancer. Pour cela, on doit avoir obtenu « Face » au $2^{\text{ème}}$ lancer puis 2 « Pile » au $3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ lancer. Le résultat du 1^{er} lancer peut être « Pile » ou « Face ».
  (on ne peut obtenir « Pile » au 2^{er} lancer, sinon les deux « Pile » consécutifs seraient obtenus pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $3^{\text{ème}}$ lancer et non au $4^{\text{ème}}$)

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X=4] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rll} & a_4 & \\ = & \mathbb{P}([X=4]) & \\ = & \mathbb{P}\Big((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)\Big) & \\ = & \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + +\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) & \textit{(car c'est une union d'événements incompatibles)} \\ = & \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(P_4) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(P_4) & \textit{(car ce sont des intersections d'événements indépendants)} \\ = & \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 & \textit{(car la pièce est équilibrée)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } a_4 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.}$$

□

2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- L'événement U_n est réalisé si et seulement si, au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs. Ceci est équivalent à obtenir deux piles consécutifs **pour la $1^{\text{ère}}$ fois** :
  - × soit au $2^{\text{ème}}$ lancer,
  - × soit au $3^{\text{ème}}$ lancer,
  - × $\cdots$,
  - × soit au $(n-1)^{\text{ème}}$ lancer,
  - × soit au $n^{\text{ème}}$ lancer.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } U_n = \bigcup_{k=2}^{n} [X=k].}$$

- Comme les événements $[X = 2]$, ..., $[X = n]$ sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}(U_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} [X = k]\right) \;=\; \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}([X = k]) \;=\; \sum_{k=2}^{n} a_k$$

$$\boxed{\text{D'où, pour tout } n \in [\![2, +\infty[\![\; : \; u_n = \mathbb{P}(U_n) = \sum_{k=2}^{n} a_k.}$$

Commentaire

- Démontrons que les événements $[X = 2]$, ..., $[X = n]$ sont deux à deux incompatibles.
  - × Par définition de la v.a.r. X : $X(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![$.
  - × Ainsi la famille $\big(\, [X = k] \, \big)_{k \in [\![2,+\infty[\![}$ forme un système complet d'événements. En particulier, les événements $[X = 2]$, ..., $[X = n]$ sont incompatibles.
- On peut aussi démontrer que les événements $[X = 2]$, ..., $[X = n]$ sont incompatibles en utilisant la définition d'incompatibilité.
  Soit $(i, j) \in \big([\![2, n]\!]\big)^2$ tel que : $i \neq j$.
  L'événement $[X = i] \cap [X = j]$ est réalisé si et seulement on obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux piles consécutifs à la fois au $i^{\text{ème}}$ et au $j^{\text{ème}}$ lancer. Cela est impossible car : $i \neq j$. Ainsi :

$$[X = i] \cap [X = j] \;=\; \varnothing$$

□

3. a) Recopier et compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile _______:
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile + 1
        else:
            pile = _____
        tirs = ____________
    return tirs
```

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante.

```
1  def simulX():
2      tirs = 0
3      pile = 0
4      while pile < 2:
5          if rd.random() < 1/2:
6              pile = pile + 1
7          else:
8              pile = 0
9          tirs = tirs + 1
10     return tirs
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simulX`,
  × elle ne prend pas de paramètre en entrée.

```
1  def simulX():
```

En ligne 2, la variable `tirs`, qui contiendra le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs pour la $1^{\text{ère}}$ fois, est initialisée à 0 (aucun lancer n'a encore été effectué).

```
2      tirs = 0
```

En ligne 3, la variable `pile`, qui contiendra le nombre de piles consécutifs, est initialisée à 0.

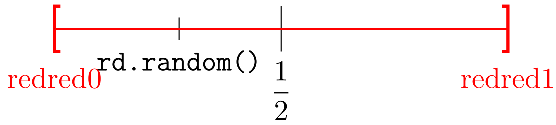
```
3      pile = 0
```

- **Structure itérative**
  × Les lignes 4 à 9 consistent à déterminer le rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs. On doit donc effectuer des lancers de pièce jusqu'à obtenir deux « Pile » consécutifs. Autrement dit, on doit effectuer des lancers de pièce tant que le nombre de piles consécutifs est strictement inférieur à 2.
  (on rappelle que c'est la variable `pile` *qui contient le nombre de piles consécutifs)*
  Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
4      while pile < 2:
```

  × En ligne 5, la fonction utilise la commande `rd.random()`.
  L'instruction `rd.random()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

× Cette valeur choisie aléatoirement dans $[0,1]$ permet d'obtenir une simulation d'un lancer de pièce équilibrée.



Deux cas se présentent.

– Si `rd.random()` $< \dfrac{1}{2}$: alors, on considère qu'on a obtenu « Pile ».
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}$$

ce qui correspond bien à un lancer de pièce équilibrée.
Dans ce cas, on met à jour la variable `pile` en l'incrémentant de 1.

```
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile + 1
```

– Si `rd.random()` $\geqslant \dfrac{1}{2}$: alors, on considère qu'on a obtenu « Face ».
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leqslant U \leqslant 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leqslant U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}$$

Dans ce cas, le nombre de « Pile » consécutifs est ré-initialisé à 0. On met donc à jour la variable `pile` en conséquence.

```
        else:
            pile = 0
```

× La variable `tirs` est incrémentée de 1 pour signifier qu'on a effectué 1 lancer supplémentaire.

```
        tirs = tirs + 1
```

- **Fin de la fonction**
À l'issue de la boucle while, la variable `tirs` contient le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la $1^{\text{ère}}$ fois deux « Pile » consécutifs. Elle contient donc une simulation de la v.a.r. X. Il ne reste plus qu'à renvoyer cette valeur.

```
    return tirs
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Python**. □

b) Écrire une fonction **Python** nommée `moyenne(n)` qui simule `n` fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante.

```
1 def moyenne(n):
2     S = 0
3     for k in range(n):
4         S = S + simulX()
5     return S/n
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `moyenne`,
  × elle prend en entrée un paramètre `n`.

  En ligne 2, on commence par initialiser la variable `S` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).
- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 permettent de mettre à jour la variable `S` pour qu'elle contienne la somme de `n` simulations de la v.a.r. X. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle for) et on utilise la fonction `simulX` définie en question précédente pour obtenir des simulations de la v.a.r. X.

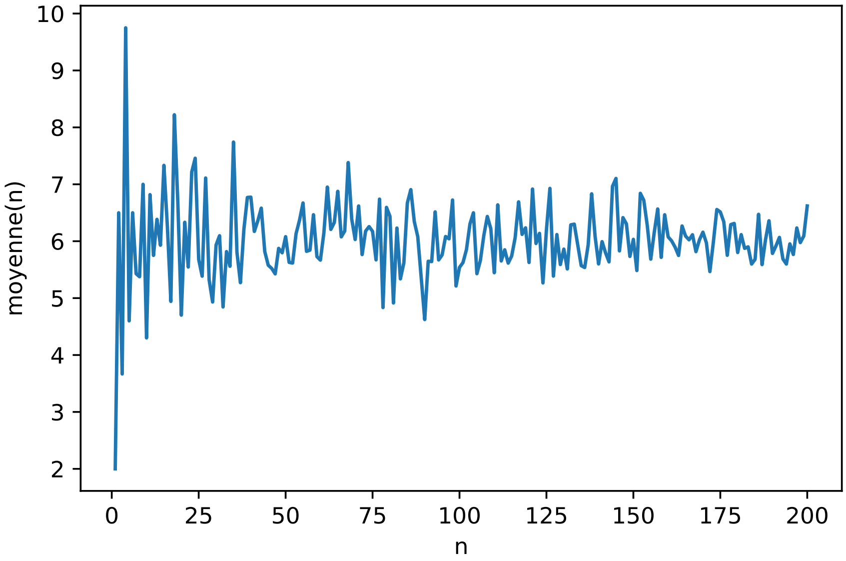
```
3     for k in range(n):
4         S = S + simulX()
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle for, la variable `S` contient la somme de `n` simulations de la v.a.r. X. La variable `S / n` contient alors la moyenne des `n` simulations de X (ce qui était demandé).

```
5     return S/n
```

□

c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier `n` de $[\![1, 200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Démonstration.

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On note $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de la v.a.r. X.
  D'après la question précédente, la fonction `moyenne` renvoie une simulation de la variable aléatoire $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
- Le graphe de cette question présente donc des simulations de $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, ..., $\bar{X}_{200}$.
- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est :
  × de simuler un grand nombre de fois ($N = 200$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. X.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X.
  (les v.a.r. X_i sont indépendantes et de même loi que X)
  × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

  Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \;=\; \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \;\simeq\; \mathbb{E}(X)$$

- On en déduit que la courbe représentée se rapproche de $\mathbb{E}(X)$.

$$\boxed{\text{On conjecture alors : } \mathbb{E}(X) \approx 6.}$$

□

Partie B

4. ***a)*** Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par définition de U_n, on a : $U_n = \bigcup\limits_{k=2}^{n} B_k$. Ainsi :

$$U_{n+1} \;=\; \bigcup_{k=2}^{n+1} B_k \;=\; \left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1} \;=\; U_n \cup B_{n+1}$$

- On en déduit, par formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_{n+1}) &= \mathbb{P}(U_n \cup B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})}$$

□

b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} \;=\; (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \,\cup\, (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 4$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= \big(U_n \cap B_{n+1}\big) \cap \Omega \\ &= \big(U_n \cap B_{n+1}\big) \cap \big(F_{n-1} \cup P_{n-1}\big) && \textit{(car } (F_{n-1}, P_{n-1}) \textit{ forme un système complet d'événements)} \\ &= \big(U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}\big) \cup \big(U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}\big) && \textit{(d'après les lois de Morgan)} \end{aligned}$$

- Étudions alors les 2 événements de l'union.
  × D'une part :

$$U_n \;=\; \bigcup_{k=2}^{n} B_k \;=\; \left(\bigcup_{k=2}^{n-2} B_k\right) \cup B_{n-1} \cup B_n \;=\; U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$$

  Ainsi, d'après les lois de Morgan :

$$U_n \cap F_{n-1} \;=\; \big(U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n\big) \cap F_{n-1} \;=\; \big(U_{n-2} \cap F_{n-1}\big) \cup \big(B_{n-1} \cap F_{n-1}\big) \cup \big(B_n \cap F_{n-1}\big)$$

  Or :
  - par définition de B_{n-1} :

$$B_{n-1} \cap F_{n-1} \;=\; \big(P_{n-2} \cap P_{n-1}\big) \cap F_{n-1} \;=\; P_{n-2} \cap \big(P_{n-1} \cap F_{n-1}\big) \;=\; P_{n-2} \cap \varnothing \;=\; \varnothing$$

  - par définition de B_n :

$$B_n \cap F_{n-1} \;=\; \big(P_{n-1} \cap P_n\big) \cap F_{n-1} \;=\; P_n \cap \big(P_{n-1} \cap F_{n-1}\big) \;=\; P_n \cap \varnothing \;=\; \varnothing$$

On en déduit :

$$U_n \cap F_{n-1} \;=\; \big(U_{n-2} \cap F_{n-1}\big) \cup \varnothing \cup \varnothing \;=\; U_{n-2} \cap F_{n-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, par définition de } B_{n+1} : \\ U_n \cap F_{n-1} \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.\end{array}}$$

× D'autre part :

$$U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1} \;=\; U_n \cap P_{n-1} \cap \big(P_n \cap P_{n+1}\big) \;=\; U_n \cap \big(P_{n-1} \cap P_n\big) \cap P_{n+1} \;=\; U_n \cap B_n \cap P_{n+1}$$

Or, comme $U_n = \bigcup\limits_{k=2}^{n} B_k$, alors : $B_n \subset U_n$. D'où : $U_n \cap B_n = B_n$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1} = B_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } U_n \cap B_{n+1} = \big(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \cup \big(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big).}$$

□

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} \;=\; u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)*** :

$$\underbrace{\mathbb{P}(U_{n+1})}_{= u_{n+1}} \;=\; \underbrace{\mathbb{P}(U_n)}_{= u_n} \;+\; \mathbb{P}(B_{n+1}) \;-\; \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

- De plus, comme P_n et P_{n+1} sont indépendants :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{4}$$

- Ensuite, d'après la question précédente :

$$U_n \cap B_{n+1} \;=\; \big(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \cup \big(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big)$$

C'est une union d'événements incompatibles. D'où :

$$\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}\big(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) + \mathbb{P}\big(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}\big)$$

× D'une part, comme les événements P_{n-1}, P_n et P_{n+1} sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) \;=\; \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{8}$$

× D'autre part :

- l'événement U_{n-2} se réfère aux $n-2$ premiers lancers (lancers 1 à $n-2$),
- l'événement $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ se réfère aux lancers $n-1$, n et $n+1$.

Comme les lancers sont indépendants, les événements U_{n-2} et $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ sont donc indépendants. On en conclut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) &= \mathbb{P}(U_{n-2}) \times \mathbb{P}(F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\
&= u_{n-2} \times \mathbb{P}(F_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_n) \qquad \textit{(car } F_{n-1},\ P_n \textit{ et } P_{n+1} \textit{ sont indépendants)} \\
&= u_{n-2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{8}\, u_{n-2}
\end{aligned}$$

- En rassemblant les résultats précédents, on obtient :

$$u_{n+1} \;=\; u_n + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{8}\, u_{n-2} + \frac{1}{8}\right) \;=\; u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\, u_{n-2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 4,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2}).}$$

□

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 4$. D'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n \;=\; \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

Or : $u_{n-2} = \mathbb{P}(U_{n-2}) \leqslant 1$. D'où : $1 - u_{n-2} \geqslant 0$. On en déduit :

$$u_{n+1} - u_n \;\geqslant\; 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 4} \text{ est donc croissante.}}$$

- Pour tout $n \geqslant 4$: $u_n = \mathbb{P}(U_n) \leqslant 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est :
  - × croissante,
  - × majorée par 1.

  Elle converge donc vers une limite ℓ vérifiant : $\ell \leqslant 1$.
- Enfin, toujours d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 4$:

$$u_{n+1} \;=\; u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

Ainsi, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{array}{rrcl} & \ell & = & \ell + \frac{1}{8}\,(1-\ell) \\ \text{donc} & 0 & = & \frac{1}{8}\,(1-\ell) \\ \text{d'où} & 0 & = & 1-\ell \\ \text{ainsi} & \ell & = & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la suite } (u_n) \text{ converge vers 1.}}$$

Commentaire

On pouvait également démontrer la croissance de la suite de la suite (u_n) en exploitant le fait que la suite (U_n) est une suite croissante d'événements.

- Soit $n \geqslant 2$. On remarque : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ (démontré en question ***4.a)***). Ainsi :

$$U_n \;\subset\; U_{n+1}$$

- Par croissance de $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(U_n) \;\leqslant\; \mathbb{P}(U_{n+1})$$

D'où : $u_n \leqslant u_{n+1}$.

□

6. En déduire :
$$\mathbb{P}(\,[X=-1]\,) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) \;=\; 0$$

Démonstration.

- L'événement $[X=-1]$ est réalisé si et seulement si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs. Autrement dit $[X=-1]$ est réalisé si et seulement si, pour tout $n \geqslant 2$, on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs au cours des n premiers lancers. Ainsi :
$$[X=-1] \;=\; \bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{U_k}$$
On en déduit :
$$\mathbb{P}([X=-1]) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{U_k}\right) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{U_k}}\right) \;=\; 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right)$$
$$\boxed{\mathbb{P}([X=-1]) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right)}$$
- On cherche alors à calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right)$.
  - × Tout d'abord, par corollaire du théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} U_k\right)$$
  - × Démontrons maintenant que la suite (U_n) est une suite d'événements croissante.
(il n'est bien sûr pas utile de démontrer ce point si cela a été fait en question précédente)
Soit $n \geqslant 2$. Démontrons : $U_n \subset U_{n+1}$.
Avec le même raisonnement qu'en question ***4.a)*** :
$$U_{n+1} \;=\; U_n \cup B_{n+1}$$
Ainsi : $U_n \subset U_{n+1}$.
$$\boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ est une suite croissante d'événements.}}$$
  - × Comme (U_n) est une suite croissante d'événements :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=2}^{n} U_k \;=\; U_n$$
On en déduit :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} U_k\right) \;=\; \mathbb{P}(U_n) \;=\; u_n$$
De plus, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} U_k\right) \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([X=1]) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} U_k\right) \;=\; 1-1 \;=\; 0.}$$

□

Commentaire

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

1) Introduire des événements simples (« tirer une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage », « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ...) liés à l'expérience considérée.
Nommer l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

2) Décomposer l'événement A à l'aide d'événements simples.

3) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union d'une suite croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le corollaire du théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant l'événements contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection d'une suite décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule des probabilités composées.

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le corollaire du théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant l'événement contraire.

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n \; = \; 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad S_n \; = \; \sum_{k=2}^{n} k \, \mathbb{P}(\, [X = k] \,)$$

7. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} \; = \; \frac{1}{8} \, v_{n-2}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 4$.

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= (\cancel{1} - u_n) - (\cancel{1} - u_{n+1}) && \textit{(par définition de } v_n \textit{ et } v_{n+1}\textit{)} \\ &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8} \, (1 - u_{n-2}) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{8} \, v_{n-2} && \textit{(par définition de } v_{n-2}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \, v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} \, v_{n-2}}$$

□

8. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(\, [X = n+1] \,) \; = \; v_n - v_{n+1}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Comme $v_n = 1 - u_n = 1 - \mathbb{P}(U_n)$, nous allons établir une relation entre les événements $[X = n+1]$, U_n et U_{n+1} pour répondre à cette question.
  Tout d'abord, l'événement U_{n+1} est réalisé si et seulement si on obtient deux « Pile » consécutifs au cours des $n+1$ premiers lancers. Autrement dit, U_{n+1} est réalisé si et seulement si :
  × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs au cours des n premiers lancers,
  × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la première fois au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer.
  Ainsi :
  $$U_{n+1} \; = \; U_n \cup [X = n+1]$$
- Les événements $[X = n+1]$ et U_n sont de plus incompatibles puisqu'on ne peut obtenir pour la première fois deux « Pile » consécutifs au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer et à la fois les avoir obtenus au cours des n premiers lancers.
  On obtient alors :
  $$\mathbb{P}(U_{n+1}) \; = \; \mathbb{P}(U_n \cup [X = n+1]) \; = \; \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}([X = n+1])$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}([X = n+1]) \; = \; \mathbb{P}(U_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n) \; = \; u_{n+1} - u_n \; = \; (1 - v_{n+1}) - (1 - v_n) \; = \; v_n - v_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \, \mathbb{P}([X = n+1]) = v_n - v_{n+1}}$$

Commentaire

- Notons qu'on pouvait justifier l'égalité entre événements $U_{n+1} = U_n \cup [X = n+1]$ « en démontrant au préalable l'égalité $U_{n+1} = \bigcup\limits_{k=2}^{n+1} [X = k]$». Détaillons cette manière de procéder.
- Pour tout $p \geqslant 2$, on commence par remarquer :

$$U_p \;=\; \bigcup_{k=2}^{p} \, [X = k]$$

En effet, l'événement U_p est réalisé si et seulement si on obtient deux « Pile » consécutifs au cours des k premiers lancers. Autrement dit U_p est réalisé si et seulement si :

× soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $2^{\text{ème}}$ lancer,

× soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $3^{\text{ème}}$ lancer,

× ...

× soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $p^{\text{ème}}$ lancer,

On en déduit :

$$U_{n+1} \;=\; \bigcup_{k=2}^{n+1} \, [X = k] \;=\; \left(\bigcup_{k=2}^{n} \, [X = k] \right) \cup [X = n+1] \;=\; U_n \cup [X = n+1]$$

- Avec ce procédé, l'incompatibilité des événements $U_n = \bigcup\limits_{k=2}^{n} [X = k]$ et $[X = n+1]$ pouvait s'obtenir en remarquant que la famille $\big([X = k] \big)_{k \in -1 \cup [\![2, +\infty[\![}$ forme un système complet d'événements (car $X(\Omega) \subset \{-1\} \cup [\![2, +\infty[\![$). □

9. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n \;=\; 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $S_n = 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$.

▶ **Initialisation**

- D'une part :

$$S_2 \;=\; \sum_{k=2}^{2} k\, \mathbb{P}([X = k]) \;=\; 2\, \mathbb{P}([X = 2]) \;=\; 2 \times \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2}$$

où l'avant-dernière égalité est obtenue avec la question ***1.***

- Calculons d'autre part v_2 et v_4.

× Calcul de v_2. Tout d'abord :

$$v_2 \;=\; 1 - u_2 \;=\; 1 - \mathbb{P}(U_2) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{2} B_k \right) \;=\; 1 - \mathbb{P}(B_2)$$

Or, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(B_2) \;=\; \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \;=\; \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \;=\; \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } v_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.}$$

× Calcul de v_4. Tout d'abord :

$$v_4 \;=\; 1 - u_4 \;=\; 1 - \mathbb{P}(U_4)$$

Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(U_4) \;=\; \mathbb{P}(U_3) + \mathbb{P}([X = 4]) \;=\; \Big(\mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}([X = 3])\Big) + \mathbb{P}([X = 4])$$

D'après le calcul de v_2 et la question ***1.***, on en déduit :

$$\mathbb{P}(U_4) \;=\; \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } v_4 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

Finalement :

$$6 - 8\,v_4 - 2\,v_2 \;=\; 6 - 8 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{3}{4} \;=\; 6 - 4 - \frac{3}{2} \;=\; 2 - \frac{3}{2} \;=\; \frac{1}{2}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.

► **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $S_{n+1} = 6 - 8\,v_{n+3} - (n+1)\,v_{n+1}$).

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X = k]) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\,\mathbb{P}([X = k]) + (n+1)\,\mathbb{P}([X = n+1]) \\
&= S_n + (n+1)\,(v_n - v_{n+1}) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n + (n+1)\,v_n - (n+1)\,v_{n+1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= 6 - 8\,v_{n+2} + v_n - (n+1)\,v_{n+1}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***7.*** (qui est applicable car, comme $n \geqslant 2$, alors $n + 2 \geqslant 4$) :

$$v_{n+2} - v_{n+3} \;=\; \frac{1}{8}\,v_n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 6 - 8\left(v_{n+3} + \frac{1}{8}\,v_n\right) + v_n - (n+1)\,v_{n+1} \\
&= 6 - 8\,v_{n+3} - \cancel{v_n} + \cancel{v_n} - (n+1)\,v_{n+1} \\
&= 6 - 8\,v_{n+3} - (n+1)\,v_{n+1}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ S_n = 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n.}$$

Commentaire

Si l'on avait utilisé en question précédente la relation :

$$\forall p \geqslant 2, \quad U_p \ = \ \bigcup_{k=2}^{p} [X = k]$$

on pouvait effectuer le calcul de v_2 et de v_4 de la façon suivante.

- Calcul de v_2. Tout d'abord :

$$v_2 \ = \ 1 - u_2 \ = \ 1 - \mathbb{P}(U_2) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X = 2]) \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

  Or, d'après la question ***1.***, on sait : $\mathbb{P}([X = 2]) = \dfrac{1}{4}$. D'où : $v_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

- Calcul de v_4.

$$v_4 \ = \ 1 - u_4 \ = \ 1 - \mathbb{P}(U_4)$$

  Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(U_4) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{4} [X = k]\right) \ = \ \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X = 2]) + \mathbb{P}([X = 3]) + \mathbb{P}([X = 4])$$

  où la 2ème égalité est obtenue par incompatibilité des événements de l'union (car la famille $\big([X = k]\big)_{k \in \{-1\} \cup [\![2, +\infty[\![}$ est un système complet d'événements).
  D'après la question ***1.***, on obtient :

$$\mathbb{P}(U_4) \ = \ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \ = \ \frac{1}{2}$$

  D'où : $v_4 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$\square$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et majorée.

Démonstration.

- La suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} k\, \mathbb{P}([X = k])$. Or cette série est à termes positifs.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (S_n)_{n \geqslant 2} \text{ est croissante.}}$$

Commentaire

- On utilise ici la propriété du cours suivante.

  Soit $\sum u_n$ une série et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des sommes partielles associée.

$$\boxed{\sum u_n \text{ est à termes positifs} \quad \Rightarrow \quad (S_n) \text{ est croissante}}$$

  Rappelons que cette propriété se démontre facilement comme suit.

- Supposons que la série $\sum u_n$ est à termes positifs. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $S_{n+1} - S_n = u_n \geqslant 0$. Ainsi, (S_n) est croissante.
- Notons que ce résultat peut en fait s'énoncer sous forme d'équivalence. En effet, si (S_n) est croissante, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = S_{n+1} - S_n \geqslant 0$. On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. La série $\sum u_n$ est donc à termes positifs.

- Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente :

$$S_n = 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n$$

- Or, pour tout $k \geqslant 2$, par propriété d'une probabilité :

$$\begin{array}{lrcccl} & 0 & \leqslant & u_k & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & 1 & \geqslant & 1 - u_k & \geqslant & 0 \\ \text{d'où} & 1 & \geqslant & v_k & \geqslant & 0 \end{array}$$

On en déduit : $v_{n+2} \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$. Ainsi : $8\,v_{n+2} \geqslant 0$ et $n\,v_n \geqslant 0$. On obtient :

$$\begin{array}{lccl} & 8\,v_{n+2} + n\,v_n & \geqslant & 0 \\ \text{donc} & -8\,v_{n+2} - n\,v_n & \leqslant & 0 \\ \text{d'où} & 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n & \leqslant & 6 \\ \text{ainsi} & S_n & \leqslant & 6 \end{array}$$

$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (S_n) \text{ est majorée par } 6.}$ □

11. Montrer que X admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum k\,\mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- De plus, comme précisé en question précédente, la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\,\mathbb{P}([X = k])$. Or, d'après la question précédente, la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est :
  × croissante,
  × majorée par 6.

  Elle est donc convergente. Ainsi, la série $\sum k\,\mathbb{P}([X = k])$ l'est aussi.

$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une espérance.}}$ □

12. a) Démontrer que la suite $(n\,v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un réel λ.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$. D'après la question ***9.*** :

$$n\,v_n = 6 - 8\,v_{n+2} - S_n$$

Or :

× la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente d'après la question précédente.

× la suite (v_{n+2}) est convergente, car la suite (v_n) l'est. En effet, d'après la question ***5.***, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1. De plus :

$$\forall n \geqslant 2, \quad v_n = 1 - u_n$$

On en déduit que la suite (v_n) converge vers 0.

$\boxed{\begin{array}{c}\text{La suite } (n\,v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est donc convergente en tant que} \\ \text{combinaison linéaire de suites convergentes. On note } \lambda \text{ sa limite.}\end{array}}$ □

b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontrée à la question ***7.***, obtenir une contradiction.

Démonstration.

- Supposons : $\lambda \neq 0$. D'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, v_n = \lambda$. Comme $\lambda \neq 0$, on en déduit : $n\, v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda$. D'où :

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$$

- On obtient alors :
  - × $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$
  - × $\forall n \geqslant 2,\ v_n \geqslant 0$
  - × la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente. Et la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\lambda}{n}$ l'est aussi.
  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} v_n$ est divergente.

$$\boxed{\text{Finalement, si } \lambda \neq 0, \text{ alors la série } \sum_{n \geqslant 2} v_n \text{ est divergente.}}$$

- *On ne suppose plus dans ce point :* $\lambda \neq 0$.
D'après la question ***7.*** :

$$\forall k \geqslant 4, \qquad v_k - v_{k+1} = \frac{1}{8}\, v_{k-2}$$

Soit $n \geqslant 2$. On somme les égalités précédentes pour k variant de 4 à $n+2$. On obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=4}^{n+2} (v_k - v_{k+1})}_{= \, v_4 - v_{n+3}} = \sum_{k=4}^{n+2} \left(\frac{1}{8}\, v_{k-2}\right)$$

(par télescopage)

De plus :

$$\sum_{k=4}^{n+2} \left(\frac{1}{8}\, v_{k-2}\right) = \frac{1}{8} \sum_{k=4}^{n+2} v_{k-2} = \frac{1}{8} \sum_{k=2}^{n} v_k \qquad \textit{(par décalage d'indice)}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = 8\,(v_4 - v_{n+3})$$

- Or, d'après la question précédente, la suite (v_n) converge vers 0. On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} v_k\right)_{n \geqslant 2}$ est convergente (elle converge vers $8\, v_4$).

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum_{n \geqslant 2} v_n \text{ est convergente.}}$$

- Démontrons par l'absurde : $\lambda = 0$.
  Supposons : $\lambda \neq 0$. Alors :
  × d'après le 1$^{\text{er}}$ point, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} v_n$ est divergente.
  × d'après le 2$^{\text{ème}}$ point, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} v_n$ est convergente.

  Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda = 0, \textit{ i.e. } \lim_{n \to +\infty} n\, v_n = 0.}$$

□

c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.

Démonstration.

- D'après la question ***9.***, pour tout $n \geqslant 2$:

$$S_n \ = \ 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$$

- Or :
  × d'après la question ***11.***, la v.a.r. X admet une espérance et, par définition de $(S_n)_{n \geqslant 2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \mathbb{E}(X)$.
  × toujours d'après la question ***11.*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+2} = 0$.
  × d'après la question ***12.b)*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, v_n = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } \mathbb{E}(X) = 6 - 8 \times 0 - 0 = 6. \\ \textit{(ce qui est bien ce qu'on avait conjecturé en question } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)}\end{array}}$$

□