DS2 (vB)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Problème 1

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.

2. ***a)*** Soit $x \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k^{e} de f.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

3. Soit $x \in]0,1[$ fixé.

a) Montrer que la fonction $\varphi_x \,:\, t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0,x]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

c) On **admet** que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

Montrer que

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

d) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

4. Soit x un réel de $]0,1[$.
Montrer que la série $\sum \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie II : Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit p un réel fixé de $]0,1[$. On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi (appelée loi de *Rademacher* de paramètre p), vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([Y_n = 1]) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([Y_n = -1]) = 1 - p.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

On introduit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par récurrence :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

6. Simulation informatique.

- ***a)*** Écrire une fonction **Python** nommée `Rademacher(p)` qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher de paramètre p.
- ***b)*** Écrire alors une fonction **Python** nommée `simul_traj_X(n,p)` qui simule les variables aléatoires $X_0, \ldots, X_n$ et renvoie le résultat sous la forme d'une liste $[X_0, X_1, \ldots, X_n]$.

7. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

- ***a)*** Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).
- ***b)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k$?
- ***c)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k - n$.

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

9. On souhaite démontrer dans cette question un résultat général nommé *Lemme de Borel-Cantelli.*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$ et on pose $B = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.

- ***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$.
- ***b)*** Soit $\omega \in \Omega$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\omega \in B \iff \omega \in A_k \text{ pour une infinité de valeurs de } k$$

- ***c)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ *(indication : théorème de la limite monotone).*
- ***d)*** Montrer que $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$ puis conclure que $\mathbb{P}(B) = 0$.

10. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$.

- ***a)*** Montrer que $0 < p(1-p) < \dfrac{1}{4}$.
- ***b)*** À l'aide de la Partie I, montrer que la série $\sum p_{2n}$ converge et préciser sa somme.
  En déduire que la série $\sum p_n$ converge aussi et interpréter ce résultat à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

11. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

- ***a)*** Montrer que $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
- ***b)*** Montrer que la série $\sum p_{2n}$ diverge puis que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty$.

Problème 2

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}([N = 0]) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N = k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N = k - 1])$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N = k]) = \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N = 0])$$

b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k])$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}([N = k]) = 0$$

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0, 1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{p}{1 - p} \times \frac{n - k + 1}{k} \times \mathbb{P}([Z = k - 1])$$

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}([N = 1])$. En déduire : $a + b \geqslant 0$.

b) Montrer, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}([N = k]) \;=\; a \sum_{k=0}^{m-1} (k + 1)\, \mathbb{P}([N = k]) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N = k])$$

c) En déduire que $\left((1 - a) \sum\limits_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}([N = k]) \right)_{m \geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}\big(N^2\big) \;=\; \frac{(a + b)(a + b + 1)}{(1 - a)^2}$$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad G(x) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k])\, x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$.

On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$. On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = p_0\,(1 - a\,x)^{\alpha}$$

6. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) \;=\; k! \times p_k\,(1 - a\,x)^{\alpha - k}$$

7. Soit $x \in [0,1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1 - a\,t)^{\alpha - n - 1}\,(x - t)^n \; dt$$

b) Vérifier, pour tout $t \in [0,x]$: $\dfrac{x - t}{1 - at} \leqslant 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \;\leqslant\; \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1}\,(x - t)^n \; dt \;\leqslant\; \int_0^x (1 - at)^{\alpha - 1} \; dt$$

c) En déduire :

$$G(x) \;=\; p_0\,(1 - ax)^{\alpha}$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question ***4.*** de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \;\text{ si }\; N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \;\text{ sinon}$$

8. Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque $a \in\,]0,1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

9. ***a)*** Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

b) On considère la fonction **Python** suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
def simulX(n):
    y = 0
    for i in range(1, n+1):
        if rd.random() < 1/2:
            y = y + 1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

c) On rappelle qu'en **Python** l'instruction `rd.poisson(theta)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `theta`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre θ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
def simulS(theta,n):
    N = rd.poisson(theta)
    ..........
    ..........
    ..........
    ..........
```

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N=k])$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}([X_1=k])$$

On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S_n = k-j]) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1}=k])$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \mathbb{P}([S=k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathbb{P}([S_n = k-j])$$

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1}=k])$$

c) Justifier :

$$\mathbb{P}([S=k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1}=k])$$

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}([S=k]) \;=\; \frac{1}{1-a\,q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a+\frac{b\,j}{k}\right) q_j\,\mathbb{P}([S=k-j])$$