DS2 (vB) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Problème 1 (`Sujet 0 ECRICOME 2023 + lemme de Borel Cantelli ESSEC II 2021`)

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.

- 2 pts : bonne rédaction de la régularité d'une composée

2. ***a)*** Soit $x \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k^{e} de f.

- 1 pt : initialisation

- 4 pts : hérédité (dont 1 pt pour l'IPP valide et 1 pt pour $n+1>0$ lors du calcul du crochet)

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

- 1 pt : initialisation

- 3 pts : hérédité (dont 1 pt pour une tentative bien écrite même si elle n'aboutit pas)

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

- 1 pt : cas $x=0$

- 2 pts : cas $x \neq 0$

3. Soit $x \in]0,1[$ fixé.

a) Montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0,x]$.

- 1 pt : $\varphi_x'(t) = (x-1)\dfrac{1}{(1-t)^2} < 0$ car $x<1$

0 pt si pas de mention que φ_x est dérivable sur $[0,x]$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

- **1 pt :** $0 \leqslant (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n (1-t)^{-\frac{3}{2}}$
- **1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$)**
- **1 pt :** $\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}t = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)$

c) On **admet** que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

- **1 pt :** $(2n+2)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2n+2}{\mathbf{e}}\right)^{2n+2} \sqrt{2\pi(2n+2)}$ **ou** $(n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n+1}{\mathbf{e}}\right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}$ **bien écrit**
- **2 pts :** $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi(2n+2)}}{2\pi} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}}$
- **1 pt :** $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

d) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

- **1 pt :** $|x| < 1$ **donc, par croissances comparées,** $\sqrt{n}x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

4. Soit x un réel de $]0,1[$.
Montrer que la série $\sum \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k = f(x)$

Partie II : Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit p un réel fixé de $]0,1[$. On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi (appelée loi de *Rademacher* de paramètre p), vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([Y_n = 1]) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([Y_n = -1]) = 1-p.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

- **1 pt :** Y_n **est finie donc admet une espérance et une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_n) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p-1$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Y_n) = 1 - (2p-1)^2 = 1 - (4p^2 - 4p + 1) = 4p(1-p)$

On introduit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par récurrence :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

6. Simulation informatique.

a) Écrire une fonction **Python** nommée `Rademacher(p)` qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher de paramètre p.

- 1 pt : `if rd.random() < p:`

- 1 pt : `return 1`

- 1 pt : `return -1`

- 1 pt : syntaxe correcte

```
def Rademacher(p):
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
        return -1
```

b) Écrire alors une fonction **Python** nommée `simul_traj_X(n,p)` qui simule les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ et renvoie le résultat sous la forme d'une liste $[X_0, X_1, \dots, X_n]$.

- 1 pt : `L = [0]`

- 1 pt : `for k in range(n):`

- 1 pt : `L.append(L[-1] + Rademacher(p))`

- 1 pt : syntaxe correcte

```
def simul_traj_X(n,p):
    L = [0]
    for k in range(n):
        L.append(L[-1] + Rademacher(p))
    return L
```

7. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

a) Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).

- 1 pt : $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$**. On en déduit que** Z_n **suit une loi de Bernoulli.**

- 1 pt : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k$?

- 1 pt : Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

- 1 pt : Les variables aléatoires $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ **sont mutuellement indépendantes par lemme des coalitions (les variables** $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ **étant mutuellement indépendantes par hypothèse)**

- 1 pt : par théorème de stabilité des lois binomiales $\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k - n$.

- 1 pt : initialisation

- 1 pt : hérédité

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

- 1 pt : $p_{2n+1} = 0$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{2n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$

- 1 pt : $p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$

9. On souhaite démontrer dans cette question un résultat général nommé *Lemme de Borel-Cantelli.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$ et on pose $B = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$.

- 1 pt : $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \bigcup \left(\bigcup\limits_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) = A_n \cup B_{n+1}$

b) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\omega \in B \iff \omega \in A_k \text{ pour une infinité de valeurs de } k$$

- 1 pt : implication directe

- 1 pt : implication réciproque

- 1 pt : qualité rédaction

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ *(indication : théorème de la limite monotone).*

- 1 pt : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

- 1 pt : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{N} A_k \right) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k \right) = \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{N} A_k \right)$

d) Montrer que $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$ puis conclure que $\mathbb{P}(B) = 0$.

- 1 pt : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

- 1 pt : par théorème d'encadrement, $\mathbb{P}(B_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

10. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $0 < p(1-p) < \dfrac{1}{4}$.

- 1 pt : étude de $\varphi : t \mapsto t(1-t)$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

- 1 pt : $p \in]0,1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) À l'aide de la Partie I, montrer que la série $\sum p_{2n}$ converge et préciser sa somme.
En déduire que la série $\sum p_n$ converge aussi et interpréter ce résultat à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} p^k(1-p)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ **(en posant $x = 4p(1-p)$)**

- 1 pt : d'après la question *10.a)*, $0 < x < 1$

- 1 pt : d'après la question *4*, la série $\sum \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{2k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_{2k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ **donc la série $\sum p_n$ converge aussi**

- 2 pts : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [X_n = 0]$, de sorte que le résultat précédent se traduise en : la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, l'événement

« une infinité des événements A_k se réalisent simultanément »

est quasi-impossible. Autrement dit, il est quasi-impossible que lors de la marche aléatoire, on revienne une infinité de fois en 0.

11. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

- 1 pt : $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}}{2\pi n} = 2^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

- 1 pt : $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$

b) Montrer que la série $\sum p_{2n}$ diverge puis que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty$.

- 1 pt : la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par critère de Riemann

- 1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum p_{2n}$ diverge également

- 1 pt : Puisque il s'agit d'une série à termes positifs, sa suite des sommes partielles est croissante et non majorée et donc elle diverge vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty}$$

Problème 2 (`Ecricome 2018 voie S`)

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}([N=0]) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N=k-1])$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0])$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

- 2 pts : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = \mathbb{P}([N=0])\ \mathrm{e}^b$ **(dont 1 pt pour justification convergence)**

- 2 pts : $\mathbb{P}([N=0]) = \mathrm{e}^{-b}$ **(dont 1 pt pour** $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ **SCE)**

- 1 pt : $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ **donc** $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = b$

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}([N=k]) = 0$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

- 1 pt : N **suit une loi** $\mathcal{B}(p)$ **où** $p = \mathbb{P}([N=1])$

- 2 pts : $\mathbb{P}([N=1]) = -\dfrac{a}{1-a}$

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1])$$

- 2 pts

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ **et** $\mathbb{P}([Z=0]) \neq 1$
- **3 pts : cas** $k \in [\![1, n]\!]$ **(dont 1 pt pour** $a = -\dfrac{p}{1-p}$**, 1 pt pour** $b = \dfrac{p}{1-p}\,(n+1)$**)**
- **1 pt : cas** $k = n+1$
- **1 pt : cas** $k \in [\![n+2, +\infty[\![$

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}([N=1])$. En déduire : $a + b \geqslant 0$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([N=1]) = (a+b)\,\mathbb{P}([N=0])$
- **1 pt :** $a + b \geqslant 0$

b) Montrer, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

- **2 pts : 1 pt pour utilisation relation de Panjer, 1 pt pour décalage d'indice**

c) En déduire que $\left((1-a) \sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m \geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance. Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.

- **1 pt :** $(1-a) \sum\limits_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (a+b) \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) - m\,\mathbb{P}([N=m])$
- **1 pt :** $(1-a) \sum\limits_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;\leqslant\; (a+b) \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \;\leqslant\; 1$
- **1 pt :** $(1-a) \sum\limits_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;\leqslant\; a+b$ **(car** $a+b \geqslant 0$**)**
- **1 pt :** $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m \geqslant 1}$ **converge (par théorème de limite monotone)**
- **1 pt :** $\lim\limits_{m \to +\infty} m\;\mathbb{P}([N=m]) = 0$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}\big(N^2\big) \;=\; \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

- **1 pt : convergence absolue**
- **2 pts :** $(1-a) \sum\limits_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (2a+b) \sum\limits_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + (a+b) \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \;-\; m^2\,\mathbb{P}([N=m])$

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant\ \dfrac{2a+b}{1-a}\sum\limits_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + \dfrac{a+b}{1-a}\sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant\ \dfrac{2a+b}{1-a}\,\mathbb{E}(N) + \dfrac{a+b}{1-a}$
- **1 pt : N admet un moment d'ordre 2 (théorème de la limite monotone)**
- **2 pts :** $\mathbb{E}(N^2) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

- **1 pt : N admet une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

- **1 pt :** $(\Leftarrow)$
- **4 pts :** $(\Rightarrow)$ **(1 pt pour :** $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \Leftrightarrow a=0$ `OU` $a+b=0$**, 2 pts pour $a=0$ (par l'absurde), 1 pt pour $b>0$)**

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N=k])$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n\,x^n$ est convergente.

- **1 pt : cas $x=1$**
- **3 pts : cas $x\in[0,1[$ (critère de comparaison des SATP)**

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad G(x) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\,x^k \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])\,x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0<a<1$ et que $\dfrac{b}{a}>0$. On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = p_0\,(1-a\,x)^{\alpha}$$

6. Montrer, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) \ = \ k! \times p_k\,(1-a\,x)^{\alpha-k}$$

- **2 pts : f_0 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ (dont 1 pt pour démontrer $h_1([0,1])\subset\,]0,+\infty[$)**
- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

7. Soit $x \in [0,1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\, (x-t)^n \; dt$$

- 3 pt : récurrence

b) Vérifier, pour tout $t \in [0,x]$: $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \;\leqslant\; \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}\, (x-t)^n \; dt \;\leqslant\; \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} \; dt$$

- 2 pts : $\dfrac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1$

- 1 pt : $0 \;\leqslant\; (1-a\,t)^{\alpha-n-1} \; (x-t)^n \;\leqslant\; (1-a\,t)^{\alpha-1}$

- 1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

c) En déduire :

$$G(x) \;=\; p_0\, (1-ax)^{\alpha}$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

- 2 pts : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \,(n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1} \; (x-t)^n \; dt \;=\; 0$

- 1 pt : $f(x) = G(x)$ **(d'après *5.*)**

- 1 pt : $G(1) = 1$

- 1 pt : $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^{\alpha}}$

- 1 pt : $G'(1) = \dfrac{a+b}{1-a} = \mathbb{E}(N)$

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question ***4.*** de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \;\text{ si }\; N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \;\text{ sinon}$$

8. Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque $a \in \,]0,1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

- 1 pt : FPT sur le SCE $([N=i])_{i\in\mathbb{N}}$

- 1 pt : $\mathbb{P}([S=0] \cap [N=0]) = p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^{\alpha}}$

- 1 pt : $[S=0] \cap [N=i] = \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{i} X_k = 0\right] \cap [N=i]$

- **1 pt :** $\left[\sum\limits_{k=1}^{i} X_k = 0\right] = \bigcap\limits_{k=1}^{i} [X_k = 0]$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) = p_i\, x_0^i$ **où** $x_0 = \mathbb{P}([X_1 = 0])$ **(1 pt pour indépendance mutuelle, 1 pt pour les X_i ont même loi)**
- **2 pts :** $\mathbb{P}([S=0]) = G(x_0)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S=0]) = \left(\dfrac{1-a\,x_0}{1-a}\right)^{\alpha}$

9. a) Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) = \mathbf{e}^{-\lambda}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) = \dfrac{(\lambda\, x_0)^i}{i!}\ \mathbf{e}^{-\lambda}$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([S=0]) = \mathbf{e}^{-(1-x_0)\lambda}$ **où** $x_0 = \mathbb{P}([X_1=0])$

b) On considère la fonction **Python** suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
def simulX(n):
    y = 0
    for i in range(1, n+1):
        if rd.random() < 1/2:
            y = y + 1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

- **2 pts : simulation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$**

c) On rappelle qu'en **Python** l'instruction `rd.poisson(theta)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `theta`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre θ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
def simulS(theta,n):
    N = rd.poisson(theta)
    ..........
    ..........
    ..........
    ..........
```

- **4 pts : 1 pt pour initialisation `s`, 2 pts pour boucle for, 1 pt bonus si tout est juste**

```
def simulS(theta, n):
    N = rd.poisson(theta)
    S = 0
    for k in range(N):
        S = S + simulX(n)
    return S
```

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}([X_1 = k])$$

On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S_n = k-j]) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \mathbb{P}([S = k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathbb{P}([S_n = k-j])$$

- **1 pt : FPT sur le SCE** $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$
- **1 pt :** $[N = 0] \cap [S = k-j] = [N = 0] \cap [S_0 = k-j]$
- **1 pt :** $[N = n] \cap [S = k-j] = [N = n] \cap [S_n = k-j]$

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

- **3 pts**

c) Justifier :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

- **2 pts : 1 pt pour** $\mathbb{P}([S = k]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}([S_n = k])$**, 1 pt pour décalage d'indice**

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \frac{1}{1 - a\,q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j])$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([S = k]) = \sum\limits_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j])$
- **1 pt :** $(1 - a\,q_0)\ \mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum\limits_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \frac{1}{1 - a\,q_0} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j])$ **(car** $1 - a\,q_0 \neq 0$**)**