DS2 (vB) - Correction

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Problème 1 (`Sujet 0 ECRICOME 2023 + lemme de Borel Cantelli ESSEC II 2021`)

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.

Démonstration. La fonction f est de la forme $f = \dfrac{1}{\sqrt{g}}$ où

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$
- $g : x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ car polynomiale et $g([0,1[) \subset]0,+\infty[$

Ainsi, par composition et par passage à l'inverse :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0,1[.}$$

□

2. ***a)*** Soit $x \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k^{e} de f.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\dfrac{x^k}{k!} + \displaystyle\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$ »
<u>Initialisation</u> :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(0+1)}(t)\frac{(x-t)^0}{0!}\mathrm{d}t &= f(0)\frac{x^0}{0!} + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \\ &= f(0) + (f(x) - f(0)) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

On procède par intégration par parties, valide car les fonctions u et v qui suivent sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$ (cf question ***1***) :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!} & u(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v(t) = f^{(n+1)}(t) & v'(t) = f^{(n+2)}(t) \end{array} \right.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t &= \Big[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \Big]_0^x - \int_0^x -f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \qquad \textit{(car } n+1>0\textit{)} \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a bien montré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

□

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in [0, 1[, f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$ »
Initialisation :
Soit $x \in [0, 1[$.
D'une part : $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
D'autre part : $\dfrac{(0)!}{2^0 0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Dérivons $f^{(n)}$ (possible d'après la question ***1***) : pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= -\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-n-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-n-\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(n+\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{2n+1}{2}(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!} &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)}\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\cancel{(2n+2)}(2n+1)}{2\cancel{(2n+2)}}\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{2n+1}{2}\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a bien montré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

□

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$.
<u>Premier cas</u> : $x = 0$.
D'une part : $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$.
D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{0}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^0 (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{0-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = \binom{0}{0} = 1$$

D'où l'égalité lorsque $x = 0$.
<u>Deuxième cas</u> : $x \in]0,1[$.
D'après les questions ***2.a)*** et ***2.b)*** :

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}(1-t)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{x^k}{4^k} + \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!n!}\int_0^x (1-t)^{-n-1-\frac{1}{2}}(x-t)^n \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{x^k}{4^k} + \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!n!}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!n!} = \frac{n+1}{2^{2n+2}}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$$

et on remarque que

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \binom{2k}{k} \qquad \text{et} \qquad \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \binom{2n+2}{n+1}$$

D'où le résultat. □

3. Soit $x \in]0,1[$ fixé.

a) Montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0,x]$.

Démonstration. Soit $t \in [0,x]$.

$$\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t} = \frac{x-1+1-t}{1-t} = (x-1)\frac{1}{1-t} + 1$$

La fonction φ_x est dérivable sur $[0,x]$ et

$$\varphi_x'(t) = (x-1)\frac{1}{(1-t)^2} < 0 \qquad \text{car } x < 1$$

Donc

$$\boxed{\varphi_x \text{ est décroissante sur l'intervalle } [0,x].}$$

□

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0,x]$. Alors $0 \leqslant t \leqslant x$ et par décroissance de φ_x sur $[0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$$

La fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$$

et $(1-t)^{-\frac{3}{2}} \geqslant 0$ donc

$$0 \leqslant (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n (1-t)^{-\frac{3}{2}}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$:

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} x^n \mathrm{d}t = x^n \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}t$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}t &= \left[-\frac{(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^x \\ &= \left[2(1-t)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^x \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)}$$

$\square$

c) On **admet** que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

Démonstration. D'après l'équivalent admis :

$$(2n+2)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2n+2}{\mathrm{e}}\right)^{2n+2} \sqrt{2\pi(2n+2)}$$

et

$$(n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\binom{2n+2}{n+1} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n+2}{\mathrm{e}}\right)^{2n+2} \sqrt{2\pi(2n+2)}}{\left(\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}\right)^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n+2}{\mathrm{e}}\right)^{2n+2} \sqrt{2\pi(2n+2)}}{\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{2n+2} 2\pi(n+1)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n+2)^{2n+2} \sqrt{2\pi(2n+2)}}{(n+1)^{2n+2}\, 2\pi(n+1)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+2}\,(n+1)^{2n+2} \sqrt{2\pi(2n+2)}}{(n+1)^{2n+2}\, 2\pi(n+1)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+2}\sqrt{2\pi(2n+2)}}{2\pi(n+1)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n+2)}}{2\pi} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi(n+1)}}{2\pi} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}{2\pi} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et finalement on a bien

$$\boxed{\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}}$$

□

d) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***3.b)*** :

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right).$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right).$$

Et d'après la question ***3.c)*** :

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}x^n}{\sqrt{\pi}}$$

Or, $|x| < 1$ donc, par croissances comparées, $\sqrt{n}x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit par théorème d'encadrement que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0}$$

□

4. Soit x un réel de $]0,1[$.
Montrer que la série $\sum \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***2.c)*** :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k = f(x) - \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$$

et d'après la question ***3.d)*** :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k = f(x)$$

ce qui prouve que la série $\sum \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

□

Partie II : Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit p un réel fixé de $]0,1[$. On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi (appelée loi de *Rademacher* de paramètre p), vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([Y_n = 1]) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([Y_n = -1]) = 1 - p.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

Démonstration. Tout d'abord, la variable aléatoire Y_n est finie donc admet une espérance et une variance.

$$\mathbb{E}(Y_n) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2$$

Or, Y_n^2 est une variable aléatoire constante égale à 1 donc $\mathbb{E}(Y_n^2) = 1$ et finalement :

$$\mathbb{V}(Y_n) = 1 - (2p-1)^2 = 1 - (4p^2 - 4p + 1) = 4p(1-p)$$

□

On introduit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par récurrence :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

6. Simulation informatique.

a) Écrire une fonction **Python** nommée `Rademacher(p)` qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher de paramètre p.

Démonstration. On propose la fonction suivante :

```
def Rademacher(p):
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
        return -1
```

On rappelle que la commande `rd.random() < p` permet de simuler la réalisation d'un événement A vérifiant $\mathbb{P}(A) = p$ (ici l'événement $[Y_n = 1]$). □

b) Écrire alors une fonction **Python** nommée `simul_traj_X(n,p)` qui simule les variables aléatoires $X_0, \ldots, X_n$ et renvoie le résultat sous la forme d'une liste $[X_0, X_1, \ldots, X_n]$.

Démonstration. On propose la fonction suivante :

```
def simul_traj_X(n,p):
    L = [0]
    for k in range(n):
        L.append(L[-1] + Rademacher(p))
    return L
```

□

7. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

a) Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).

Démonstration. On remarque que $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et donc $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$. On en déduit que Z_n suit une loi de Bernoulli.
Or,

$$\mathbb{P}([Z_n = 1]) = \mathbb{P}([Y_n = 1]) = p$$

donc

$$\boxed{Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)}$$

□

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?

Démonstration. On a :

- Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
- Les variables aléatoires $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes par lemme des coalitions (les variables $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ étant mutuellement indépendantes par hypothèse)

On en déduit par théorème de stabilité des lois binomiales que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)}$$

□

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n$ »
<u>Initialisation</u> :
D'une part :

$$2\sum_{k=0}^{1-1} Z_k - 1 = 2Z_0 - 1 = Y_0 + 1 - 1 = Y_0$$

D'autre part :

$$X_1 = X_0 + Y_0 = 0 + Y_0 = Y_0$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_n + Y_n \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n + Y_n && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n + (2Z_n - 1) \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} Z_k - (n+1)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

On a bien montré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k - n$. □

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k$. Alors

$$\begin{aligned} p_{2n+1} &= \mathbb{P}([X_{2n+1} = 0]) \\ &= \mathbb{P}([2W_{2n+1} - (2n+1) = 0]) && \textit{(cf question } \textbf{\textit{7.c)}}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[W_{2n+1} = \frac{2n+1}{2}\right]\right) \\ &= 0 && \textit{(car } W_{2n+1}(\Omega) = [\![0, 2n+1]\!] \textit{ et } \frac{2n+1}{2} \textit{ n'est pas un entier)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_{2n} &= \mathbb{P}([X_{2n} = 0]) \\ &= \mathbb{P}([2W_{2n} - 2n = 0]) && \textit{(cf question } \textbf{\textit{7.c)}}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}([W_{2n} = n]) \\ &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n} && \textit{(car } W_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)\textit{)} \\ &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \end{aligned}$$

□

9. On souhaite démontrer dans cette question un résultat général nommé *Lemme de Borel-Cantelli.*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$ et on pose $B = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) = A_n \cup B_{n+1}$$

On en déduit que $B_{n+1} \subset B_n$. □

b) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\omega \in B \iff \omega \in A_k \text{ pour une infinité de valeurs de } k$$

Démonstration. Procédons par double implication.

- Supposons que $\omega \in B$.
  On en déduit que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \omega \in B_n$$
  et donc
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant n, \omega \in A_k$$
  Ainsi, l'ensemble des indices k tels que $\omega \in A_k$ est une partie non majorée de $\mathbb{N}$. A ce titre, cet ensemble est infini, ce qui veut dire que $\omega \in A_k$ pour une infinité de valeurs de k.
- Supposons que $\omega \in A_k$ pour une infinité de valeurs de k.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des indices k tels que $\omega \in A_k$ étant infini, il est donc non majoré. En particulier, on peut ainsi trouver un entier $k \geqslant n$ tel que $\omega \in A_k$. Il vient $\omega \in B_n$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $\omega \in B$.

□

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ *(indication : théorème de la limite monotone).*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait que si A et B sont deux événements, alors
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
car $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$.
On en déduit, par récurrence immédiate, que pour tout $N \in \mathbb{N}$, si $N \geqslant n$, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)$$
De plus, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et il s'agit d'une série à termes positifs donc
$$\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$
D'autre part, d'après la théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right)$$
D'où, par passage à la limite dans l'inégalité précédente :
$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)}$$

□

d) Montrer que $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$ puis conclure que $\mathbb{P}(B) = 0$.

Démonstration. La suite (B_n) étant décroissante au sens de l'inclusion, une nouvelle application du théorème de la limite monotone donne :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

De plus, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ étant convergente :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$$

D'où, par théorème d'encadrement (puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_n) \geqslant 0$) :

$$\mathbb{P}(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui se traduit bien par

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0}$$

□

10. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $0 < p(1-p) < \dfrac{1}{4}$.

Démonstration. On note $\varphi : t \mapsto t(1-t)$ définie sur $[0,1]$. La fonction φ est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$:

$$\varphi'(t) = 1 - 2t$$

D'où son tableau de variations :

t	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

D'après le tableau de variations,

- φ admet un maximum global qui vaut $\dfrac{1}{4}$ et qui est atteint uniquement en $\dfrac{1}{2}$
- φ admet un minimum global qui vaut 0 et qui est atteint uniquement en 0 et en 1

Puisque $p \in]0,1[\setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, il vient que

$$\boxed{0 < p(1-p) < \frac{1}{4}.}$$

□

b) À l'aide de la Partie I, montrer que la série $\sum p_{2n}$ converge et préciser sa somme.
En déduire que la série $\sum p_n$ converge aussi et interpréter ce résultat à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} (p(1-p))^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \left(\frac{4p(1-p)}{4}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k \qquad \textit{(en posant } x = 4p(1-p)\textit{)}\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***10.a)***, $0 < x < 1$. Ceci permet d'utiliser la question ***4*** et donc la série $\sum \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$$

Ensuite,

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} p_k + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} p_k = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} p_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{2k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} p_{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$$

donc la série $\sum p_n$ converge aussi.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [X_n = 0]$, de sorte que le résultat précédent se traduise en : la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, l'événement

« une infinité des événements A_k se réalisent simultanément »

est quasi-impossible. Autrement dit, il est quasi-impossible que lors de la marche aléatoire, on revienne une infinité de fois en 0. □

11. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $p_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Démonstration. On reprend le calcul de la question ***3.c)***, en remplaçant $n+1$ par n :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}}{2\pi n} = 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

et donc

$$p_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

□

b) Montrer que la série $\sum p_{2n}$ diverge puis que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty$.

Démonstration. • pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{2n} \geqslant 0$ et $\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \geqslant 0$

• $p_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

- la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par critère de Riemann et donc la série $\sum \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge par mutiplication par un scalaire non nul

On en déduit, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, que la série $\sum p_{2n}$ diverge également.

Puisque il s'agit d'une série à termes positifs, sa suite des sommes partielles est croissante et non majorée et donc elle diverge vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty}$$

$\square$

Problème 2 (Ecricome 2018 voie S)

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}([N=0]) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N=k-1])$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0])$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $\mathbb{P}([N=k]) = \dfrac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0])$.

▶ **Initialisation** :

$$\frac{b^0}{0!}\, \mathbb{P}([N=0]) = \frac{1}{1}\, \mathbb{P}([N=0]) = \mathbb{P}([N=0])$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}([N=k+1]) = \dfrac{b^{k+1}}{(k+1)!}\, \mathbb{P}([N=0])$).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([N=k+1]) &= \left(0 + \frac{b}{k+1}\right) \mathbb{P}([N=k]) && \text{(car } N \text{ vérifie une relation de Panjer avec } a=0\text{)} \\
&= \frac{b}{k+1} \times \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0]) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{b^{k+1}}{(k+1)!}\, \mathbb{P}([N=0])
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([N=k]) = \dfrac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0])$.

□

b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([N=k]) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}([N=0]) && \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \mathbb{P}([N=0]) \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}
\end{aligned}$$

Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{b^n}{n!}$ est la série exponentielle de paramètre b. Elle est donc convergente. De plus :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = \mathrm{e}^b$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \ = \ \mathbb{P}([N=0])\ \mathrm{e}^b.}$$

- D'après l'énoncé, la v.a.r. N est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On en déduit que la famille $\big([N=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1 \\ \text{donc} & \mathbb{P}([N=0])\,\mathrm{e}^b = 1 \\ \text{d'où} & \mathbb{P}([N=0]) = \mathrm{e}^{-b} \end{array}$$

- Ainsi :
  - × $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (d'après l'énoncé),
  - × $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([N=k]) = \dfrac{b^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-b}$ (d'après la question précédente).

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{P}(b).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(N) = b \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N) = b.}$$ $\square$

2. On suppose **dans cette question** que $a<0$ et que $b=-2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}([N=k]) = 0$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \geqslant 2$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $\mathbb{P}([N=k]) = 0$.

▸ **Initialisation**

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([N=2]) & = & \left(a + \dfrac{-\cancel{2}\,a}{\cancel{2}}\right) \mathbb{P}([N=1]) & \textit{(car N vérifie une relation de Panjer de paramètres a et $b=-2a$)} \\ & = & 0 \times \mathbb{P}([N=1]) & \\ & = & 0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}([N=k+1]) = 0$).

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([N=k+1]) & = & \left(a + \dfrac{-2a}{k+1}\right) \mathbb{P}([N=k]) & \\ & = & \left(a - \dfrac{2a}{k+1}\right) \times 0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}([N=k]) = 0.}$$ $\square$

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

Démonstration.

- On sait déjà :
  × $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
  × $\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}([N = k]) = 0$.

  On en déduit : $N \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, où : $p = \mathbb{P}([N = 1])$.

Commentaire

- Dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi de Bernoulli (de paramètre p) admet pour ensemble image $\{0, 1\}$. Ici, N a pour ensemble image $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ mais prend les valeurs $k \in [\![2, +\infty[\![$ avec probabilité nulle. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([N = x])$$

(et ces probabilités sont nulles si $x \in \mathbb{N}^*$)

  On considère alors que les v.a.r. discrètes X et N sont toutes deux de même loi $\mathcal{B}(p)$.
- Cette propriété se généralise comme suit.
  Soient X et Y deux v.a.r. **discrètes**. Alors :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi } \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([Y = x])$$

- On insiste sur le fait que la propriété précédente n'est vérifiée que pour les v.a.r. discrètes. Rappelons que si X est une v.a.r. à densité alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}\big([X = x]\big) = 0$.

- Il reste à déterminer $\mathbb{P}([N = 1])$. Or :
  × d'une part : $\mathbb{P}([N = 1]) = \left(a - \dfrac{2a}{1}\right) \mathbb{P}([N = 0]) = -a\mathbb{P}([N = 0])$,
  × d'autre part : $\mathbb{P}([N = 1]) = 1 - \mathbb{P}([N = 0])$.

  Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \mathbb{P}([N = 0]) & + & \mathbb{P}([N = 1]) & = & 1 \\ a\,\mathbb{P}([N = 0]) & + & \mathbb{P}([N = 1]) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - a\,L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} \mathbb{P}([N = 0]) & + & \mathbb{P}([N = 1]) & = & 1 \\ & & (1 - a)\,\mathbb{P}([N = 1]) & = & -a \end{array}\right.$$

  Ainsi, comme $a \neq 1$: $\mathbb{P}([N = 1]) = -\dfrac{a}{1 - a}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\frac{a}{1 - a}\right).}$$

□

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1])$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1]) \\
= \;& \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)} && \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \\
= \;& \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(n-(k-1))!\,(k-1)!}\; p^k \, \frac{(1-p)^{n-k+\cancel{1}}}{\cancel{1-p}} \\
= \;& \frac{n-k+1}{(n-k+1)!} \times \frac{n!}{k \times (k-1)!}\; p^k\,(1-p)^{n-k} \\
= \;& \frac{n!}{(n-k)!\;k!}\; p^k\,(1-p)^{n-k} \\
= \;& \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} \\
= \;& \mathbb{P}([Z=k]) && \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1]).}$$

□

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on a bien : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Ensuite : $\mathbb{P}([Z=0]) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} \;=\; (1-p)^n$.
  Or, d'après l'énoncé, $p > 0$, donc : $\mathbb{P}([Z=0]) \neq 1$.
- Déterminons $a < 1$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z=k]) = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \mathbb{P}([Z=k-1])$.
  Trois cas se présentent :
  × si $k \in [\![1,n]\!]$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=k]) &= \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z=k-1]) \\
&= \frac{p}{1-p} \left(\frac{n+1}{k} - 1 \right) \mathbb{P}([Z=k-1]) \\
&= \left(-\frac{p}{1-p} + \frac{\frac{(n+1)p}{1-p}}{k} \right) \mathbb{P}([Z=k-1])
\end{aligned}$$

On pose alors :

$$a = -\frac{p}{1-p} \quad \text{et} \quad b = \frac{(n+1)p}{1-p} = -(n+1)a$$

Ainsi :

- comme $p \in \,]0,1[$: $a < 0$. D'où : $a < 1$.
- on a évidemment : $b \in \mathbb{R}$.
- d'après le calcul précédent :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \ \mathbb{P}([Z=k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([Z=k-1])$$

× si $k = n+1$.

- D'une part : $\mathbb{P}([Z=n+1]) = 0$.
- D'autre part :

$$\left(a + \frac{b}{n+1}\right)\mathbb{P}([Z=n]) \ = \ \left(a - \frac{\cancel{(n+1)}\,a}{\cancel{n+1}}\right)\mathbb{P}([Z=n]) \ = \ 0$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([Z=n+1]) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right)\mathbb{P}([Z=n])$$

× si $k \in [\![n+2,+\infty[\![$.

- D'une part : $\mathbb{P}([Z=k]) = 0$.
- D'autre part :

$$\left(a + \frac{b}{k}\right)\mathbb{P}([Z=k-1]) \ = \ \left(a - \frac{b}{k}\right) \times 0 \ = \ 0$$

Finalement, on a bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([Z=k]) \ = \ \left(a + \frac{b}{k}\right)\mathbb{P}([Z=k-1])$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z \text{ vérifie donc bien une relation de Panjer de paramètres } a = -\frac{p}{1-p} \text{ et } b = \frac{p}{1-p}\,(n+1).}$$

□

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}([N=1])$. En déduire : $a + b \geqslant 0$.

Démonstration.

- Comme la v.a.r. N vérifie la relation de Panjer de paramètres a et b :

$$\mathbb{P}([N=1]) \ = \ \left(a + \frac{b}{1}\right)\mathbb{P}([N=0])$$

$$\boxed{\mathbb{P}([N=1]) \ = \ (a+b)\,\mathbb{P}([N=0])}$$

- Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité :

$$\mathbb{P}([N=1]) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([N=0]) \geqslant 0$$

Supposons que $\mathbb{P}([N=0]) = 0$. Alors, par récurrence immédiate (analogue à celle de la question ***2.a)***), on a, pour tout entier naturel k, $\mathbb{P}([N=k]) = 0$. Or, la famille $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1$$

On en déduit que $0 = 1$. C'est absurde.
Donc $\mathbb{P}([N=0]) > 0$, ce qui permet d'écrire que

$$a+b = \frac{\mathbb{P}([N=1])}{\mathbb{P}([N=0])}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } a+b \geqslant 0.}$$

$\square$

b) Montrer, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; a\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

Démonstration.
Soit $m \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\left(a+\frac{b}{k}\right)\mathbb{P}([N=k-1]) & \textit{(car N vérifie une relation de Panjer)} \\
& = & \displaystyle a\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k-1]) + b\sum_{k=1}^{m} \cancel{k}\,\frac{1}{\cancel{k}}\,\mathbb{P}([N=k-1]) & \\
& = & \displaystyle a\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k-1]) + b\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}([N=k-1]) & \\
& = & \displaystyle a\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) & \textit{(par décalage d'indice)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall m \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; a\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])}$$ □

c) En déduire que $\left((1-a)\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.

Démonstration.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) & = & \displaystyle a\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \\
& = & \displaystyle a\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + a\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) + b\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) - a\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

  Or :
  × d'une part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k]) = \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + m\,\mathbb{P}([N=m])$.
  × d'autre part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) = \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k])$.

  D'où :

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + m\,\mathbb{P}([N=m]) - a\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

  Finalement :

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) - m\,\mathbb{P}([N=m]) \qquad (\star)$$

- Comme $m\,\mathbb{P}([N=m]) \geqslant 0$, on obtient :

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;\leqslant\; (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

De plus, comme $\big([N=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1$.
Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) & \leqslant & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \\ & & \shortparallel \\ & & 1 \end{array}$$

Comme $a+b \geqslant 0$, on en déduit :

$$(a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ a+b$$

D'où :

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ a+b$$

$$\boxed{\text{La suite } \left((1-a) \sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1} \text{ est donc majorée par } a+b.}$$

Commentaire

On a démontré :

$$\forall m \geqslant 1,\ (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ a+b$$

Dans cette propriété, la variable m est muette (car portée par le quantificateur $\forall$). En posant $r = m-1$, on obtient donc :

$$\forall r \geqslant 0,\ (a+b) \sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ a+b$$

Ceci permet bien de conclure que la suite $\left((1-a) \sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée par $a+b$.

- La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ est donc :

  × croissante, car c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs,

  × majorée par $\dfrac{a+b}{1-a}$, car $1-a > 0$.

  On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\geqslant 1}$ converge, c'est-à-dire la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est convergente. Cette série est donc absolument convergente car c'est une série à termes positifs.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } N \text{ admet une espérance.}}$$

- En reprenant $(\star)$, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \ = \ \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) - \frac{1}{1-a}\, m\,\mathbb{P}([N=m])$$

Or :

× on a déjà montré : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1$,

× comme la série $\sum\limits_{m\geqslant 1} m\,\mathbb{P}([N=m])$ est convergente, son terme général tend vers 0, *i.e.* : $\lim\limits_{m\to+\infty} m\,\mathbb{P}([N=m]) = 0$.

Ainsi, en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; \frac{a+b}{1-a}\times 1 - \frac{1}{1-a}\times 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}.}$$

□

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}\big(N^2\big) \;=\; \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

Démonstration.

- La v.a.r. N admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2\,\mathbb{P}([N=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $m\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{k=0}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) & = & \sum\limits_{k=1}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{m} k^2\left(a+\dfrac{b}{k}\right)\mathbb{P}([N=k-1]) \\
& = & a\sum\limits_{k=1}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k-1]) + b\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}([N=k-1]) \\
& = & a\sum\limits_{k=0}^{m-1} (k+1)^2\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum\limits_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}([N=k]) \\
& = & a\sum\limits_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) + 2a\sum\limits_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + a\sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \\
& + & b\sum\limits_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + b\sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) \\
& = & a\sum\limits_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) + (2a+b)\sum\limits_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k] \\
& + & (a+b)\sum\limits_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])
\end{array}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) - a\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \;=\; (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k])$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{m} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) - a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) + m^2\,\mathbb{P}([N=m]) - a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \\
= \ & (1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) + m^2\,\mathbb{P}([N=m])
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \ = \ & (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k]) \qquad (\star\star) \\ & - \ m^2\,\mathbb{P}([N=m])\end{aligned}}$$

- Or $m^2\,\mathbb{P}([N=m]) \geqslant 0$, donc :

$$(1-a)\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k])$$

D'où, comme $1-a>0$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ \frac{2a+b}{1-a}\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) + \frac{a+b}{1-a}\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k])$$

De plus :

× comme N admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est convergente. Elle est de plus à termes positifs. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([N=k]) \ = \ \mathbb{E}(N)$$

× on a déjà vu :

$$\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([N=k]) \ = \ 1$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}([N=k]) \ \leqslant \ \frac{2a+b}{1-a}\,\mathbb{E}(N) + \frac{a+b}{1-a}$$

La suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m-1} k^2\mathbb{P}([N=k])\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est donc :

× croissante, car c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs,

× majorée par $\dfrac{2a+b}{1-a}\,\mathbb{E}(N) + \dfrac{a+b}{1-a}$.

Elle est donc convergente. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2\mathbb{P}([N=n])$ est convergente.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc un moment d'ordre 2.}}$$

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En reprenant $(\star\star)$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) = \frac{2a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}([N=k]) + \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N=k]) - \frac{1}{1-a}\, m^2\, \mathbb{P}([N=m])$$

Or, comme $\sum\limits_{m \geqslant 0} m^2 \mathbb{P}([N=m])$ est une série convergente, son terme général tend vers 0, *i.e.* : $\lim\limits_{m \to +\infty} m^2\, \mathbb{P}([N=m]) = 0$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, \mathbb{P}([N=k]) &= \frac{2a+b}{1-a}\, \mathbb{E}(N) + \frac{a+b}{1-a} - \cancel{\frac{1}{1-a} \times 0} \\ &= \frac{2a+b}{1-a} \times \frac{a+b}{1-a} + \frac{a+b}{1-a} \\ &= \frac{a+b}{1-a} \times \left(\frac{2a+b}{1-a} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(N^2) = \frac{a+b}{1-a} \times \frac{2a+b+(1-a)}{1-a} = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.}$$

□

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. N admet un moment d'ordre 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que } N \text{ admet une variance.}}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(N) &= \mathbb{E}(N^2) - \big(\mathbb{E}(N)\big)^2 \\ &= \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \left(\frac{a+b}{1-a}\right)^2 \\ &= \frac{a+b}{(1-a)^2}\big((\cancel{a}+\cancel{b}+1) - (\cancel{a}+\cancel{b})\big) \\ &= \frac{a+b}{(1-a)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

□

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons que N suit une loi de Poisson.
Alors, par propriété de la loi de Poisson : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.

$(\Rightarrow)$ Supposons : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.
On aimerait montrer : $a = 0$ et $b > 0$, pour pouvoir appliquer le résultat de la question ***1.***.

- Tout d'abord, d'après les questions ***4.c)*** et ***4.e)*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) & \Leftrightarrow & \dfrac{a+b}{1-a} = \dfrac{a+b}{(1-a)^2} \\ & \Leftrightarrow & (a+b)(1-a) = a+b \qquad \textit{(car : } 1-a \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & (a+b)(1-a) - (a+b) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (a+b)(\cancel{1} - a - \cancel{1}) = 0 \\ & \Leftrightarrow & a(a+b) = 0 \\ & \Leftrightarrow & a = 0 \ \texttt{OU} \ a+b = 0 \end{array}$$

- Raisonnons par l'aburde pour montrer : $a = 0$.
  Supposons : $a + b = 0$. Alors, d'après ***4.a)*** :
  $$\mathbb{P}([N=1]) \ = \ (a+b)\,\mathbb{P}([N=0]) \ = \ 0$$
  Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N=k]) = 0$.
  On en déduit :
  × d'une part : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = 1$ (car la famille $\big([N=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements)
  × d'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) = \mathbb{P}([N=0])$ (car : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N=k]) = 0$).

  Ainsi : $\mathbb{P}([N=0]) = 1$. Absurde ! (d'après l'énoncé)
  On en déduit : $a = 0$.
- Montrons alors : $b > 0$.
  × D'après ce qui précède : $a = 0$.
  × D'après la question ***4.a)*** : $a + b \geqslant 0$.
  De plus, d'après le raisonnement par l'absurde précédent : $a + b \neq 0$. Ainsi : $a + b > 0$.

  On en déduit : $b > 0$.
- On sait alors : $a = 0$ et $b > 0$.
  On en déduit, d'après la question ***1.***, que N suit une loi de Poisson (de paramètre b).

$$\boxed{\text{Finalement, } \mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \text{ si et seulement si la v.a.r. } N \text{ suit une loi de Poisson.}}$$

□

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n \, x^n$ est convergente.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$. Deux cas se présentent.

- Si $x = 1$, alors on étudie la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$.
  La famille $\big([N = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. On en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}([N = n])$ converge et : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = 1$.
  Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$ converge.
- Si $x \in [0,1[$.
  Par propriété de $\mathbb{P}$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_k \leqslant 1$.
  On obtient :
  × $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_k \, x^k \leqslant x^k$ (car : $x^k \geqslant 0$),
  × la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ est la série géométrique de raison $x \in \,]-1,1[$. Elle est donc convergente.

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n \, x^n$ est convergente.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in [0,1], \text{ la série } \sum_{n \geqslant 0} p_n \, x^n \text{ est convergente.}}$$

□

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad G(x) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \, x^k \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \, x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = p_0 \, (1 - a\, x)^{\alpha}$$

6. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) \ = \ k! \times p_k\,(1-a\,x)^{\alpha-k}$$

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto (1-a\,x)^{\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0,1]$, car elle est la composée $g = h_2 \circ h_1$ de :
  × $h_1 : x \mapsto 1 - a\,x$ qui :
    - est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0,1]$,
    - vérifie : $h_1([0,1]) \ \subset \ ]0,+\infty[$. En effet, pour tout $x \in [0,1]$:

    $$1 - a\,x > 0 \ \Leftrightarrow \ 1 > a\,x \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{a} > x \quad (\textit{car } a > 0)$$

    Or, comme $a < 1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$: $\dfrac{1}{a} > 1$.
    Ainsi : $0 \leqslant x \leqslant 1 < \dfrac{1}{a}$. D'où : $1 - a\,x > 0$.

  × $h_2 : x \mapsto x^{\alpha}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction puissance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^{\infty} \text{ sur } [0,1].}$$

Commentaire

On peut aussi écrire f_0 sous la forme :

$$f_0 : x \mapsto p_0\,\frac{1}{(1-a\,x)^{-\alpha}}$$

- Comme $\alpha = -\dfrac{a+b}{a} < 0$, cette écriture a l'avantage de présenter f_0 comme l'inverse d'une puissance positive.
- Pour démontrer que la fonction f_0 est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0,1]$, on aurait alors insisté sur le fait qu'elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1-a\,x)^{-\alpha}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0,1]$ et qui ne s'annule pas sur cette intervalle.
  Cependant, il aurait bien fallu démontrer que la fonction $x \mapsto (1-a\,x)^{-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0,1]$ par composition.

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : \forall x \in [0,1],\ f^{(k)}(x) = k! \times p_k\,(1-a\,x)^{\alpha-k}$.
  ▸ **Initialisation**
  Soit $x \in [0,1]$.
  × D'une part : $f^{(0)}(x) \ = \ f(x) \ = \ p_0\,(1-a\,x)^{\alpha}$.
  × D'autre part : $0! \times p_0\,(1-a\,x)^{\alpha-0} \ = \ p_0 \times (1-a\,x)^{\alpha}$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
  ▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$
  (*i.e.* $\forall x \in [0,1],\ f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \times p_{k+1}\,(1-a\,x)^{\alpha-(k+1)}$).
  Soit $x \in [0,1]$. Par hypothèse de récurrence :

  $$f^{(k)}(x) \ = \ k! \times p_k\ (1-a\,x)^{\alpha-k}$$

  Comme f_0 est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0,1]$, la fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $[0,1]$, et :

  $$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) \ &= \ k! \times p_k \times (-a)\,(\alpha-k)\ (1-a\,x)^{\alpha-k-1} \\ &= \ k!\,(-a)\left(-\frac{a+b}{a} - k\right)\mathbb{P}([N=k])\ (1-a\,x)^{\alpha-(k+1)} \\ &= \ k!\,(a+b+a\,k)\,\mathbb{P}([N=k]) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}(k+1)! \times p_{k+1} &= (k+1)! \times \mathbb{P}([N=k+1]) \\ &= (k+1)! \left(a + \frac{b}{k+1}\right) \mathbb{P}([N=k]) \\ &= (k+1) \times k! \left(a + \frac{b}{k+1}\right) \mathbb{P}([N=k]) \\ &= k! \big(a(k+1)+b\big) \ \mathbb{P}([N=k]) \\ &= k!\, (a+b+a\,k)\, \mathbb{P}([N=k])\end{aligned}$$

On en déduit :

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \times p_{k+1}\, (1-a\,x)^{\alpha-(k+1)}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall x \in [0,1],\ f^{(k)}(x) = k! \times p_k\ (1-a\,x)^{\alpha-k}.}$$

□

7. Soit $x \in [0,1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\, (x-t)^n\ dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$.
Ainsi, par formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Or, d'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = k!\ p_k\ (1-a\,x)^{\alpha-k}$$

On en déduit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{k!}\ p_k\ 1^{\alpha-k}}{\cancel{k!}}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, (n+1)!\ p_{n+1}\ (1-a\,t)^{\alpha-(n+1)}\ dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt.}$$

Commentaire

- Dans ce sujet tiré de la voie S, on attendait dans cette question l'utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral. Ce résultat est bien au programme d'ECS, mais pas dans celui d'ECE. Pour l'adapter à la voie E, il aurait donc fallu admettre le résultat de cette question.
- La formule de Taylor avec reste intégral peut s'énoncer comme suit.
  Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\forall x \in I, \quad f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \ (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \ (x-t)^n \ dt$$
- Ce résultat peut se démontrer par récurrence en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$:
  $$\forall x \in I, \quad f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \ (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \ (x-t)^n \ dt$$
  Pour démontrer l'hérédité, on procède par intégration par parties (IPP) :
  $$\left| \begin{array}{lcllcl} u(t) & = & f^{(n+1)}(t) & u'(t) & = & f^{(n+2)}(t) \\ v'(t) & = & (x-t)^n & v(t) & = & -\dfrac{1}{n+1} \ (x-t)^{n+1} \end{array} \right.$$
  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

$\square$

b) Vérifier, pour tout $t \in [0,x]$: $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \ \leqslant \ \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} \, (x-t)^n \ dt \ \leqslant \ \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} \ dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $t \in [0,x]$.
  $$\begin{array}{rcll} \dfrac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1 & \Leftrightarrow & x-t \leqslant 1-a\,t & \textit{(car, comme } t \in [0,x] \subset [0,1] \textit{ :} \\ & & & 1-a\,t > 0, \textit{ d'après } \textbf{6.}) \\ & \Leftrightarrow & x-1 \leqslant (1-a)\,t & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{x-1}{1-a} \leqslant t & \textit{(car } 1-a > 0) \end{array}$$
  La dernière inégalité est vérifiée car, comme $x \in [0,1]$: $\dfrac{x-1}{1-a} \leqslant 0 \leqslant t$.
  Ainsi, par équivalence, la première aussi.
  $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0,x], \ \dfrac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1.}$$

- Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{array}{rcl} (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n & = & (1-a\,t)^{\alpha-1}\ (1-a\,t)^{-n}\ (x-t)^n \\ & = & (1-a\,t)^{\alpha-1}\ \dfrac{(x-t)^n}{(1-a\,t)^n} \\ & = & (1-a\,t)^{\alpha-1}\ \left(\dfrac{x-t}{1-a\,t}\right)^n \end{array}$$

Or, d'après la question précédente :

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1$$

donc $\quad 0^n \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-a\,t}\right)^n \leqslant 1^n \quad$ *(par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0,+\infty[$)*

d'où $\quad 0 \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1} \left(\dfrac{x-t}{1-a\,t}\right)^n \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1} \quad$ *(car : $(1-a\,t)^{\alpha-1} > 0$)*

ainsi $\quad 0 \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1}$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt}$$

□

c) En déduire :

$$G(x) \ = \ p_0\,(1-ax)^\alpha$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$0 \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

Ainsi, comme $(n+1)\,p_{n+1} \geqslant 0$:

$$0 \ \leqslant\ (n+1)\,p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant\ (n+1)\,p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

De plus :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)p_{n+1} = 0$, car $(n+1)p_{n+1}$ est terme général de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,p_n$ qui est convergente (car N admet une espérance d'après ***4.c)***).

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\,p_{n+1} \displaystyle\int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par théorème d'encadrement :}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\,p_{n+1} \displaystyle\int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ = \ 0.\end{array}}$$

- De plus, d'après la question ***7.a)*** :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\,(x-t)^n \; dt \qquad (*)$$

Or, d'après la question ***5.***, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{n} p_n\, x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, x^k \;=\; G(x)$$

Ainsi, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient :

$$f(x) \;=\; G(x) + 0$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } G(x) = f(x) = p_0\,(1-a\,x)^\alpha.}$$

- Par définition de G :

$$G(1) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\; 1^k \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k])$$

Or, la famille $\big([N=k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.

$$\boxed{\text{On en déduit : } G(1) = 1.}$$

- De plus : $G(1) = p_0\,(1-a\times 1)^\alpha$. Ainsi :

$$p_0\,(1-a)^\alpha \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = \frac{1}{(1-a)^\alpha}.}$$

- Soit $x \in [0,1]$.

$$G'(x) \;=\; p_0\,(-a)\,\alpha\,(1-a\,x)^{\alpha-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} G'(1) &= -a\,\alpha\, p_0\,(1-a)^{\alpha-1} \\ &= -\cancel{a}\,\left(-\frac{a+b}{\cancel{a}}\right)\frac{1}{(1-a)^\alpha}\;(1-a)^{\alpha-1} \\ &= (a+b)\;(1-a)^{\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}} \\ &= \frac{a+b}{1-a} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textit{4.c)} : G'(1) \;=\; \frac{a+b}{1-a} \;=\; \mathbb{E}(N).}$$

□

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question ***4.*** de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \;=\; \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{array}\right.$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \;\text{ si }\; N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \;\text{ sinon}$$

Commentaire

On rappelle qu'une v.a.r. est un application. Pour cette raison, une définition plus rigoureuse de la v.a.r. S serait :

$$S : \omega \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \end{array}\right.$$

8. Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque $a \in \,]0,1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

Démonstration.

- La famille $\big([N=i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S=0]) \;&=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) \\ &=\; \mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([S=0]\cap[N=i])\end{aligned}$$

- Tout d'abord, par définition de la v.a.r. S : $[N=0] \subset [S=0]$. D'où :

$$[S=0]\cap[N=0] \;=\; [N=0]$$

  On en déduit :

$$\mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) \;=\; \mathbb{P}([N=0]) \;=\; p_0 \;=\; \frac{1}{(1-a)^\alpha} \qquad \textit{d'après } \textbf{\textit{7.c)}}\textit{, car } a \in \,]0,1[$$

- De plus, soit $i \in \mathbb{N}^*$, toujours par définition de S :

$$[S=0]\cap[N=i] \;=\; \left[\sum_{k=1}^{N} X_k = 0\right] \cap [N=i] \;=\; \left[\sum_{k=1}^{i} X_k = 0\right] \cap [N=i]$$

  Les v.a.r. X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc : $\left[\sum\limits_{k=1}^{i} X_k = 0\right] = \bigcap\limits_{k=1}^{i} [X_k = 0]$.
  Ainsi :

$$[S=0]\cap[N=i] \;=\; \left(\bigcap_{k=1}^{i} [X_k=0]\right) \cap [N=i]$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} [X_k=0]\right)\cap[N=i]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} [X_k=0]\right)\right)\times\mathbb{P}([N=i]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1,\ \dots,\ X_i \textit{ sont indépendantes de } N\textit{)} \\
& = & \left(\prod\limits_{k=1}^{i}\mathbb{P}([X_k=0])\right)\times\mathbb{P}([N=i]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1,\ \dots,\ X_i \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\
& = & \big(\mathbb{P}([X_1=0])\big)^i\ \mathbb{P}([N=i]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1,\ \dots,\ X_i \textit{ ont même loi)}
\end{array}$$

On note alors $x_0=\mathbb{P}([X_1=0])$. On obtient :

$$\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) \ = \ x_0^i\ \mathbb{P}([N=i]) \ = \ p_i\,x_0^i$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([S=0]) & = & p_0+\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\
& = & p_0\ x_0^0+\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\
& = & G(x_0)
\end{array}$$

Or, comme $a\in\,]0,1[$, d'après la question ***7.c)*** :

$$G(x_0) \ = \ p_0\ (1-a\,x_0)^\alpha \ = \ \frac{1}{(1-a)^\alpha}\ (1-a\,x_0)^\alpha$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([S=0])=\left(\frac{1-a\,x_0}{1-a}\right)^\alpha\text{, où } x_0=\mathbb{P}([X_1=0]).}$$

□

9. a) Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration.
On peut ré-itérer le raisonnement de la question précédente.

- La famille $\big([N=i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([S=0]) & = & \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i]) \\
& = & \mathbb{P}([S=0]\cap[N=0])+\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}([S=0]\cap[N=i])
\end{array}$$

- Tout d'abord :

$$\mathbb{P}([S=0]\cap[N=0]) \ = \ \mathbb{P}([N=0]) \ = \ \frac{\lambda^0}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda} \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

- De plus :

$$[S = 0] \cap [N = i] \ = \ \left(\bigcap_{k=1}^{i} \ [X_k = 0] \right) \cap [N = i]$$

On en déduit, avec les mêmes arguments qu'en question précédente :

$$\mathbb{P}([S = 0] \cap [N = i]) \ = \ \big(\mathbb{P}([X_1 = 0])\big)^i \ \mathbb{P}([N = i]) \ = \ \big(\mathbb{P}([X_1 = 0])\big)^i \ \frac{\lambda^i}{i!} \ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

On note toujours $x_0 = \mathbb{P}([X_1 = 0])$. On obtient :

$$\mathbb{P}([S = 0] \cap [N = i]) \ = \ x_0^i \ \frac{\lambda^i}{i!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ = \ \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S = 0]) \ &= \ \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \ \mathrm{e}^{-\lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \right) \\
&= \ \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \\
&= \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \mathrm{e}^{\lambda\, x_0} && \textit{(car } \sum_{n \geqslant 0} \frac{(\lambda\, x_0)^n}{n!} \textit{ est une série exponentielle de paramètre } \lambda\, x_0\textit{)} \\
&= \ \mathrm{e}^{-\lambda + \lambda\, x_0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([S = 0]) = \mathrm{e}^{-(1 - x_0)\, \lambda}, \text{ où } x_0 = \mathbb{P}([X_1 = 0]).}$$

$\square$

b) On considère la fonction **Python** suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```python
def simulX(n):
    y = 0
    for i in range(1, n+1):
        if rd.random() < 1/2:
            y = y + 1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

Commentaire

L'énoncé s'autorise ici une confusion entre « loi » et « v.a.r. ». On parle en effet de simulation d'une v.a.r. et non d'une loi de probabilité.

Démonstration.

> La fonction `simuX` simule une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On reconnaît en effet une fonction du cours qui permet de simuler une v.a.r. X de loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
Pour se remémorer à quoi correspondent les étapes de cette fonction, on rappelle qu'on peut écrire la v.a.r. X sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

où $Z_1, \ldots, Z_n$ sont des v.a.r. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
La fonction proposée ne consiste donc en rien d'autre que coder une somme.
Détaillons maintenant cette fonction.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simuX`,
  × elle prend en paramètre la variable **n**,
  × elle admet pour variable de sortie la variable **y**.

```
1 def simuX(n):
```

  On initialise ensuite la variable `y` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation)

```
2     y = 0
```

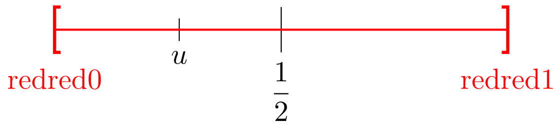
- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 6 consistent à mettre à jour la variable `y` pour qu'elle contienne une simulation de la v.a.r. $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
3     for i in range(1, n+1):
```

  Au $i^{\text{ème}}$ tour de boucle, on souhaite ajouter à la variable `y` une simulation de la v.a.r. Z_i.
  Or Z_i suit une loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Elle prend donc :
  × la valeur 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$,
  × la valeur 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
  Pour mettre à jour la variable `y`, on souhaite donc :
  × ajouter 0 (c'est-à-dire ne pas mettre à jour `y`) avec probabilité $\frac{1}{2}$,
  × ajouter 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
  C'est ce que permettent les instructions suivantes :

```
4         if rd.random() < 1/2:
5             y = y + 1
```

Détaillons la simulation de Z_i.
L'instruction `rd.random()` renvoie un réel u choisit aléatoirement dans $[0, 1]$.
Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que : $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.



Deux cas se présentent :

× si $u < \frac{1}{2}$, alors la v.a.r. Z prend la valeur 1 (on incrémente alors la variable `y` de 1).
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U < \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([Z = 1])$$

× si $u \geqslant \frac{1}{2}$, alors la v.a.r. Z prend la valeur 0 (on ne met pas à jour la variable `y`).
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$1 - \mathbb{P}\left(\left[0 \leqslant U < \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([Z = 0])$$

- **Fin de la fonction**
À l'issue de cette boucle, la variable `y` contient bien une simulation de $\sum_{i=1}^{n} Z_i = X$.

La fonction `simuX` simule donc bien une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, founir la bonne réponse démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

□

c) On rappelle qu'en **Python** l'instruction `rd.poisson(theta)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `theta`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre θ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
def simulS(theta,n):
    N = rd.poisson(theta)
    ..........
    ..........
    ..........
    ..........
```

Commentaire

L'énoncé s'autorise ici une confusion entre « loi » et « événement ». On parle en effet de réalisation d'un événement et non d'une loi de probabilité.

Démonstration.

```
def simulS(theta, n):
    N = rd.poisson(theta)
    S = 0
    for k in range(N):
        S = S + simulX(n)
    return S
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simulS`,
  × elle prend en paramètre les variables **theta** et **n**,
  × elle admet pour variable de sortie la variable **S**.

```
simulS(theta, n)
```

  On simule ensuite la v.a.r. N qui suit, d'après l'énoncé, la loi $\mathcal{P}(\theta)$, et on stocke le résultat dans une variable `N`.

```
    N = rd.poisson(theta)
```

  On souhaite qu'à l'issue de ce programme, la variable `S` contienne une simulation de la v.a.r. S qui :
  × soit prend la valeur 0,
  × soit prend la valeur d'une simulation de la somme de v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{N} X_k$.

  On initialise donc ensuite la variable `S` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation)

```
    S = 0
```

- **Structure itérative**
  La variable `S` contiendra une simulation de la v.a.r. S. Pour la mettre à jour, deux cas se présentent donc :
  × soit $\mathtt{N} = 0$, alors la variable `S` doit prendre la valeur 0.
  Comme c'est déjà le cas avec l'initialisation choisie précédement, aucune mise à jour de `S` n'est nécessaire dans ce cas.
  × soit $\mathtt{N} \geqslant 1$, alors la variable `S` doit contenir une simulation de la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{\mathtt{N}} X_k$.
  Insistons sur le fait que le dernier terme de la somme est bien $X_{\mathtt{N}}$ et non X_N. En effet, à ce stade du programme, la v.a.r. N a déjà été simulée et la valeur qu'elle a prise a été stockée dans la variable `N`. On se place donc dans le cas où l'événement $[N = \mathtt{N}]$ est réalisé.

Les lignes 4 à 5 consistent à mettre à jour la variable `S` pour qu'elle contienne une simulation de la v.a.r. $\sum_{k=1}^{\texttt{N}} X_k$. Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for).

```
4     for k in range(N):
5         S = S + simulX(n)
```

On rappelle en effet que les v.a.r. X_k suivent toutes la même loi, simulée par la fonction `simuX` de la question précédente.

On rappelle également que si $\texttt{N} = 0$, alors aucune mise à jour de `S` ne sera faite et on aura bien $\texttt{S} = 0$ en fin de boucle.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `S` contient donc bien une simulation de la v.a.r. S. □

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}([X_1 = k])$$

On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S_n = k - j]) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad \mathbb{P}([S = k - j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathbb{P}([S_n = k - j])$$

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, k]\!]$.

- La famille $\big([N = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([S = k - j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [S = k - j])$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminons $[N = n] \cap [S = k - j]$. Deux cas se présentent :
  × si $n = 0$, alors :

$$\begin{aligned} [N = 0] \cap [S = k - j] &= [N = 0] \cap [0 = k - j] && \textit{(par définition de } S\textit{)} \\ &= [N = 0] \cap [S_0 = k - j] && \textit{(par définition de } S_0\textit{)} \end{aligned}$$

× si $n \geqslant 1$, alors :

$$\begin{array}{rcll} [N=n] \cap [S=k-j] & = & [N=n] \cap \left[\sum\limits_{i=1}^{N} X_i = k-j \right] & \textit{(par définition de } S\textit{)} \\ & = & [N=n] \cap \left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k-j \right] & \\ & = & [N=n] \cap [S_n = k-j] & \textit{(par définition de } S_n\textit{)} \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([S=k-j]) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n] \cap [S_n = k-j]) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n])\ \mathbb{P}([S_n = k-j]) & \textit{(car, par lemme des coalitions, les v.a.r. } S_n \textit{ et } N \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall j \in [\![0,k]\!],\ \mathbb{P}([S=k-j]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}([S_n = k-j]).}$$

$\square$

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Démonstration.

- Soit $j \in [\![0,k]\!]$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}([S=k-j]) & = & \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}([S_n = k-j]) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}([S_n = k-j]) \end{array}$$

- Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}([S_n = k-j])$ sont convergentes. Ainsi leur somme **finie** (pour j variant de 0 à k) l'est aussi. On obtient de plus :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}([S = k-j]) \\
= &\sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}([S_n = k-j])\right) \\
= &\sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(p_n \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}([S_n = k-j])\right) \\
= &\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} p_n \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}([S_n = k-j])\right) \\
= &\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}([S_n = k-j])\right) \\
= &\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) && \textit{(d'après le résultat admis par l'énoncé)} \\
= &\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) && \textit{(car N vérifie une relation de Panjer de paramètres a et b)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S = k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])}$$

□

c) Justifier :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Démonstration.

- La famille $\big([N = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [S = k])$$

  Avec le même raisonnement qu'en question ***10.a)***, on obtient :

$$\mathbb{P}([S = k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}([S_n = k])$$

- Or :

$$[S_0 = k] \ = \ [0 = k] \ = \ \varnothing \quad \textit{(car $k \in \mathbb{N}^*$)}$$

  Donc : $\mathbb{P}([S_0 = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S = k]) \ &= \ \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}([S_n = k]) \\
&= \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k])}$$

□

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}([S=k]) \;=\; \frac{1}{1-a\,q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a+\frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j])$$

Démonstration.
D'après la question ***10.b)*** :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a+\frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j]) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1}=k])$$

D'après la question ***10.c)*** :

$$\mathbb{P}([S=k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\; \mathbb{P}([S_{n+1}=k])$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([S=k]) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \left(a+\frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j]) \\ & = & \displaystyle\left(a+\frac{b\times 0}{k}\right) q_0\; \mathbb{P}([S=k-0]) + \sum_{j=1}^{k} \left(a+\frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j]) \\ & = & \displaystyle a\,q_0\; \mathbb{P}([S=k]) + \sum_{j=1}^{k} \left(a+\frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j]) \end{array}$$

D'où :

$$(1-a\,q_0)\; \mathbb{P}([S=k]) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \left(a+\frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j])$$

Or, comme $q_0 \in [0,1]$: $1-a\,q_0 > 0$ (démontré en question ***6.***).

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}([S=k]) \;=\; \frac{1}{1-a\,q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a+\frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j]).}$$

□