Rappels de cours

Soient a et b deux entiers tels que $a \leqslant b$. On note

$$[\![a,b]\!] \overset{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid a \leqslant k \leqslant b\} = \{a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b\}$$

et

$$[\![a,+\infty[\![\overset{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid a \leqslant k\} = \{a, a+1, a+2, a+3, \ldots\}$$

1 Exercices

Exercice 1 : On lance trois fois une pièce de monnaie.

1. On note X_1 la v.a.r. égale au rang du premier `Pile`, ou égale à 0 si la pièce ne tombe jamais sur `Pile`. Déterminer $X_1(\Omega)$.
2. On note X_2 la v.a.r. égale au rang du deuxième `Pile`, ou égale à 0 si la pièce ne tombe pas deux fois sur `Pile`. Déterminer $X_2(\Omega)$.
3. On note X_3 la v.a.r. égale au rang du troisième `Pile`, ou égale à 0 si la pièce ne tombe pas trois fois sur `Pile`. Déterminer $X_3(\Omega)$.

Exercice 2 : On lance une infinité de fois une pièce de monnaie.

1. (a) On note X_1 la v.a.r. égale au rang du premier `Pile`. Déterminer $X_1(\Omega)$.
   (b) On note X_2 la v.a.r. égale au rang du deuxième `Pile`. Déterminer $X_2(\Omega)$.
   (c) On note X_3 la v.a.r. égale au rang du troisième `Pile`. Déterminer $X_3(\Omega)$.
   (d) *(Généralisation)* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note X_k la v.a.r. égale au rang du k^{e} `Pile`. Déterminer $X_k(\Omega)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Y_n la v.a.r. égale au nombre de `Pile` obtenus lors des n premiers lancers. Déterminer $Y_n(\Omega)$.

Exercice 3 : Soit $n \geqslant 2$. On considère n urnes telles que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules, numérotées de 1 à k.

1. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne. On note X le numéro de la boule obtenue. Déterminer $X(\Omega)$.
2. On choisit une urne au hasard puis on tire deux boules successivement et avec remise dans l'urne. On note Y la somme des deux numéros obtenus. Déterminer $Y(\Omega)$.

Exercice 4 : Soit $n \geqslant 2$. On considère une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On effectue une suite infinie de tirages d'une boule dans l'urne, avec remise. On note X la v.a.r. égale au rang de première obtention de la boule numéro 1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. On effectue une suite infinie de tirages d'une boule dans l'urne, sans remise. On note X la v.a.r. égale au rang de première obtention de la boule numéro 1. Déterminer $X(\Omega)$.

Exercice 5 : Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession infinie de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la v.a.r. égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste après le k^{e} tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k(\Omega)$.
2. (a) On note Y_1 la v.a.r. égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on obtient une boule noire. Autrement dit, Y_1 est égale au rang d'obtention de la première boule noire. Déterminer $Y_1(\Omega)$.
   (b) On généralise la v.a.r. précédente. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k la v.a.r. égale au rang d'obtention de la k^{e} boule noire. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k(\Omega)$.

Exercice 6 : On lance une infinité de fois une pièce de monnaie. On note X la v.a.r. égale au rang du premier `Pile` obtenu. Si le premier `Pile` a été obtenu au rang n, on place n boules numérotées de 1 à n dans une urne puis on tire au hasard une boule de l'urne. On note Y la v.a.r. égale au numéro de la boule obtenue.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.

2 Réponses courtes

3 Corrections détaillées